Skalarprodukt

Definition

Das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren ist folgendermaßen definiert

$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ = $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-4} \\ \mathbf{0,5} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-10} \end{pmatrix}$ = 2 · 1 + (-4) · 0 + 0,5 · (-10) = 2 + 0 – 5 = -3.

1) Zeichne die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ein und berechne das Skalarprodukt $\vec{v} * \vec{w}$:

a) $\vec{v}=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$	**b)** $\vec{v}=\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$
c) $\vec{v}=\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$	**d)** $\vec{v}=\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
e) $\vec{v}=\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$	**f)** $\vec{v}=\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$

2) Zeichne die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ein, bestimme ihren Betrag und den Winkel zwischen den Vektoren und berechne das Skalarprodukt $\vec{v} * \vec{w}$

g) $\vec{v}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	**h)** $\vec{v}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
i) $\vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	**j)** $\vec{v}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3) Bestimme den Parameter so, dass die Gleichung erfüllt ist:

k) $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0,2 \\ t \end{pmatrix}$= 23	**l)** $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}$= -19
m) $\begin{pmatrix} -12 \\ -15 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} s \\ 4 \end{pmatrix}$= 0	

4) Zeichne den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ ein. Bestimme zu ihm fünf verschiedene Vektoren $\vec{x}$ deiner Wahl, die die Gleichung $\vec{a} * \vec{x}$ = 0 erfüllen, und zeichne auch diese ein.

Auswertung: Das Skalarprodukt hängt einerseits von den Beträgen der beteiligten Vektoren ab.

Verdoppelt man einen der Vektoren, so verdoppelt sich auch das Skalarprodukt und entsprechendes gilt für jede Vervielfachung:

(a·$\vec{v}$) $*$ $\vec{w}$ = $\vec{v}$ $*$(a·$\vec{w}$) = a·($\vec{v}$ $*$ $\vec{w}$) (vgl. Teilaufg. **a**, **b** und **c**.)

Es gelten auch weitere altbekannte Regeln, die wir aus der Multiplikation reeller Zahlen kennen, wie

$\vec{v}$ $*$ $\vec{w}$ = $\vec{w}$*$\vec{v}$ (vgl. Teilaufg. **b** und **f**. Es handelt sich um das Kommutativgesetz)

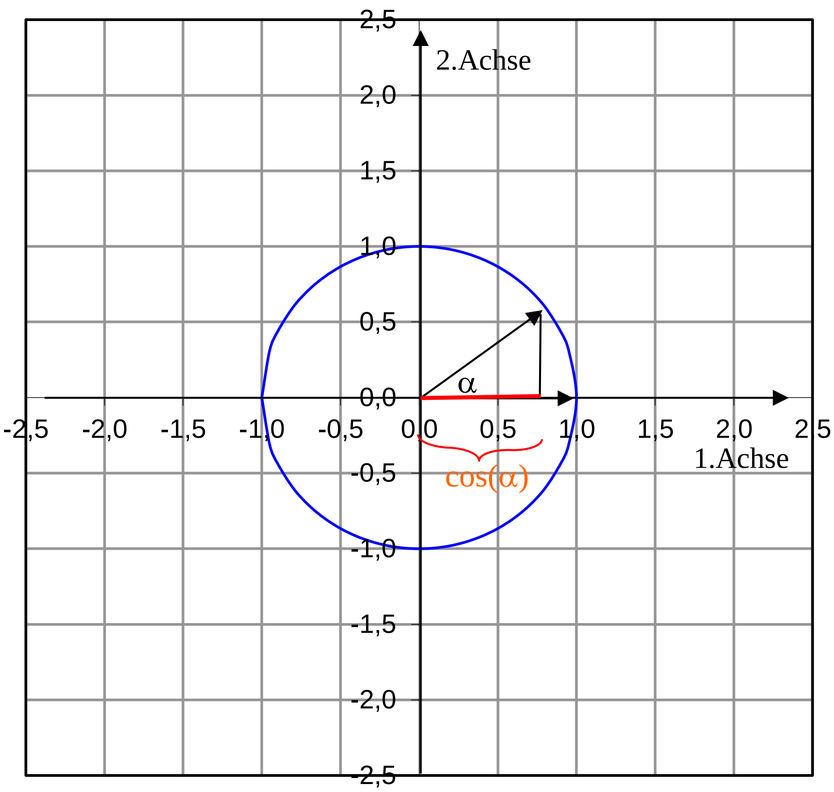
Andererseits gelten nicht alle gewohnten Regeln:

Der Satz vom Nullprodukt gilt nicht, wie Teilaufg. **d** zeigt.

Wenn man einen Vektor mit zwei unterschiedlichen anderen Vektoren multipliziert, kann dennoch dasselbe herauskommen: $\binom{1}{2}$*$\binom{1}{0}$ = 1 aber ebenso $\binom{1}{2}$*$\binom{2}{-0{,}5}$ = 1.

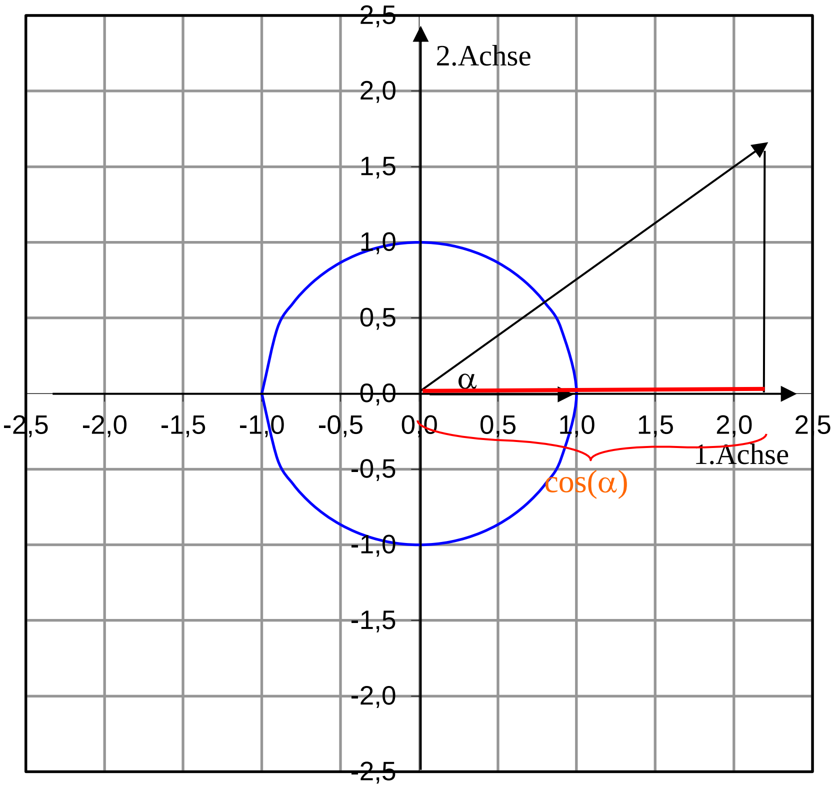
Schon deswegen kann man nicht durch Vektoren dividieren!

Offensichtlich hängt das Skalarprodukt nicht nur von der Länge der beteiligten Vektoren ab – der Winkel muss auch eine Rolle spielen.



Daher wurden in Aufgabe **h** bis **j** nur Einheitsvektoren miteinander multipliziert. Es fiel auf, dass sich Werte zwischen -1 und 1 ergaben, bei 0° der Wert 1 herauskam und bei 90° der Wert 0. Schaut man die Funktionsgraphen oder Wertetabellen grundlegender Funktionen noch einmal an so, stößt man zwangsläufig auf die Cosinusfunktion. Tatsächlich gilt für zwei Einheitsvektoren $\vec{e}$ und $\vec{f}$, die miteinander den Winkel α einschließen : $\vec{e}\cdot\vec{f}$ = cos (α).

Nun sind nicht alle Vektoren Einheitsvektoren. Sagen wir z.B. ein Vektor, der kein Einheitsvektor ist – z.B. das Dreifache des Vektors $\vec{e}$ aus dem obigen Beispiel - wird mit dem Einheitsvektor $\vec{f}$ multipliziert. Mit der Verdreifachung des Vektors verdreifacht sich auch das Skalarprodukt. Anschaulich bleibt das Skalarprodukt die Projektion des ersten Vektors $\vec{v}$ auf den Einheitsvektor $\vec{f}$.



Allgemein gilt:

Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die miteinander den Winkel α einschließen, gilt:

$\vec{a}*\vec{b}$ **=** $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\alpha)$.

Anschaulich: In diesem Fall ist $\vec{v} * \vec{w}$ die Länge der Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{w}$ multipliziert mit der Länge von $\vec{w}$.

Regeln:

<u>Kommutativgesetz</u>: $\vec{a}*\vec{b} = \vec{b}*\vec{a}$.

<u>Distributivgesetze</u>:

(r $\vec{a}$) * (s $\vec{b}$) = (rs) ($\vec{a}*\vec{b}$)

$\vec{a}$* ($\vec{b}+\vec{c}$) = $\vec{a}*\vec{b}+\vec{a}*\vec{c}$

Bem: Demgegenüber gilt der Satz vom Nullprodukt offensichtlich nicht: Wenn man zwei Vektoren, die beide nicht gleich dem Nullvektor sind, miteinander multipliziert, kann trotzdem null herauskommen.

Sonderfälle:

Orthogonalität: Da der Cosinus von 90° Null ist, können die beteiligten Vektoren so lang sein wie sie wollen, ihr Skalarprodukt wird immer null sein. Man nennt solche Vektoren orthogonal, als Zeichen verwendet man „⊥“. Somit gilt:

$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} * \vec{w}$= 0.

Kollinearität und Orientierung: [...]

Anwendungen:

Winkelberechnung: Wenn wir uns für den Winkel interessieren, den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander einschließen, sollten wie uns nach einer Gleichung umsehen, in der dieser Winkel in irgend einer Form vorkommt.

Zum Glück kennen wir so eine: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **=** $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$·cos (α)

Daraus ergibt sich sofort: cos (α) = $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|\vec{b}|}$.

Um nun α zu ermitteln, benötigen wir die Umkehrfunktion des Cosinus - sie heißt Arcuscosinus (arccos oder auf vielen Taschenrechnern $\cos^{-1}$)

α = arccos ($\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|\vec{b}|}$)

Beispiel: Gesucht ist der Winkel α

zwischen $\vec{a}$= $\begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}$ = $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\vec{a} * \vec{b}$ = 10 · 6 + (-5) · 2 = 50.

$|\vec{a}$ = $\sqrt{}(10^2+(-5)^2)$ = $\sqrt{}125$;

$|\vec{b}|$ = $\sqrt{}(6^2+2^2)$ = $\sqrt{}40$;

cos (α) =$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|\vec{b}|}$= $\frac{50}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{40}}$ ≈ 0,70710678

α = $\cos^{-1}$ (0,70710678) = 45°.

Winkel zu den Koordinatenachsen:

[...]

Winkel zwischen zwei Geraden:

[...]

Geraden:

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x}$= [...].

Geben Sie vier verschiedene Punkte an, die auf der Gerade g liegen.

Berechnen Sie für jeden dieser Punkte X das Skalarprodukt $\overrightarrow{OX}$* $\vec{v}_1$ und das Produkt Skalarprodukt $\overrightarrow{OX}$* $\vec{v}_2$.

Was fällt auf? Womit hängt das unterschiedliche Verhalten gegenüber dem Vektor $\vec{v}_1$ und dem Vektor $\vec{v}_2$ zusammen?

"Skalarprodukt"	"Skalarprodukt"
"1a":dotP$\left(\begin{bmatrix}4\\ -5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.5\\ 2\end{bmatrix}\right)$	$-8.$
"1b":dotP$\left(\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.5\\ 2\end{bmatrix}\right)$	-16
"1c":dotP$\left(\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}\right)$	$0.$
"1d":dotP$\left(\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}\right)$	$-18.$
"1e":dotP$\left(\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\ -5\end{bmatrix}\right)$	82
"1f":dotP$\left(\begin{bmatrix}0.5\\ 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix}\right)$	$-16.$
"2g":$v:=\begin{bmatrix}0.5\cdot 2^{0.5}\\ 0.5\cdot 2^{0.5}\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\mathrm{norm}(v)\cdot \mathrm{norm}(w)}\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad 0.707107\quad 45.]$
"2h":$v:=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\mathrm{norm}(v)\cdot \mathrm{norm}(w)}\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad 0.\quad 90.]$
"2i":$v:=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\ }\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad 1.\quad 0.]$

"1e":dotP$\left(\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\ -5\end{bmatrix}\right)$	82
"1f":dotP$\left(\begin{bmatrix}0.5\\ 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}8\\ -10\end{bmatrix}\right)$	$-16.$
"2g":$v:=\begin{bmatrix}0.5\cdot 2^{0.5}\\ 0.5\cdot 2^{0.5}\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\mathrm{norm}(v)\cdot \mathrm{norm}(w)}\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad 0.707107\quad 45.]$
"2h":$v:=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\mathrm{norm}(v)\cdot \mathrm{norm}(w)}\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad 0.\quad 90.]$

"2i":$v:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\mathrm{norm}(v)\cdot \mathrm{norm}(w)}\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad 1.\quad 0.]$
"2j":$v:=\begin{bmatrix}-0.5\cdot 2^{0.5}\\ 0.5\cdot 2^{0.5}\end{bmatrix}:w:=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}:\left[\mathrm{norm}(v)\quad \mathrm{norm}(w)\quad \mathrm{dotP}(v,w)\quad \cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(v,w)}{\mathrm{norm}(v)\cdot \mathrm{norm}(w)}\right)\right]$	$[1.\quad 1.\quad -0.707107\quad 135.]$
"3k":solve$\left(\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}4\\ -5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.2\\ t\end{bmatrix}\right)=23,t\right)$	$t=-4.44$
"3l":solve$\left(\mathrm{dotP}\left(\begin{bmatrix}0.5\\ 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}k\\ 2\end{bmatrix}\right)=-19,k\right)$	$k=-46.$