Glossar: Vektorprodukt

Vektorprodukt oder **Kreuzprodukt** [Lineare Algebra, Vektorrechnung]

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}.$$

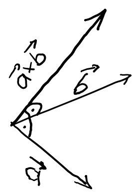
Bsp

$$\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\5\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 10-1\cdot 5\\1\cdot(-3)-2\cdot 10\\2\cdot 5-4\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\-23\\22\end{pmatrix}.$$

Schema zur Vorgehensweise:

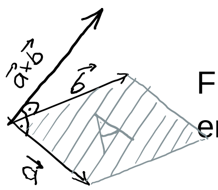
$$\begin{array}{ccc}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} & \times & \begin{pmatrix}-3\\5\\10\end{pmatrix}\\ 2 & & -3\\ 4 & & 5\end{array}=\begin{pmatrix}4\cdot 10-1\cdot 5\\1\cdot(-3)-2\cdot 10\\2\cdot 5-4\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\-23\\22\end{pmatrix}$$

Bemerkung: Richtung von $\vec{a}\times\vec{b}$:
Das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (→ Orthogonalität).



(Wenn du magst, probiere das an obigem Beispiel aus, indem du das Skalarprodukt von $\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}35\\-23\\22\end{pmatrix}$ berechnest.

Orientierung: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ bilden ein Rechtssystem (Rechte-Hand-Regel).
Betrag: $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\alpha)$. Das entspricht der Fläche des Parallelogramms, das die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zusammen bilden.



Flächeninhalt von A entspricht der Länge von $\vec{a}\times\vec{b}$

Während das Skalarprodukt bei einem 90°-Winkel zwischen den Vektoren Null ergibt, erhalten wir also beim Vektorprodukt genau dann den Nullvektor, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Winkel von 0 ° oder 180 ° zueinander stehen – also wenn sie kollinear sind.

innermathematische Anwendungen:
Bestimmung von Normalenvektoren und der Normalenform der Ebenengleichung z.B. mit dem Ziel der Abstandsbestimmung
Vektorprodukt und Skalarprodukt werden zum Spatprodukt zusammengesetzt.

physikalische Anwendungen:
Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
Lorentz-Kraft (Hier gilt allerdings die Linke-Hand-Regel)

Berechnung mit Taschenrechner oder CAS: Die entsprechende Funktion heißt oft crossprodukt

automatische Berechnung auf interaktiver website: arndt-bruenner

Links:
Video zum Drehmoment: Youtube
Zur Vertiefung für mathematisch Interessierte: Heidorn