LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: Standardabweichung

Standardabweichung [Stochastik und Beschreibende Statistik]

Die Standardabweichung ist ein Streuungsmaß, d.h., sie gibt an, wie stark die einzelnen Werte einer Grundgesamtheit um den Mittelwert herum „verstreut liegen".
Stimmen die Werte sehr stark miteinander überein (liegen also nahe beieinander), so ist die Streuung gering,
weichen sie dagegen erheblich voneinander ab, so ist die Streuung stark.

Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz (der mittlere quadratische Abweichung der Werte vom arithmetischen Mittel).

Sie ist neben der Varianz das gebräuchlichste Streuungsmaß.

Achtung: **Nicht verwechseln** mit der empirischen Standardabweichung $s=\sqrt{\frac{1}{n+1}((\bar{x}-x_1)^2+\ldots+(\bar{x}-x_n)^2)}$

Bezeichnung: σ (sprich: „sigma" - im Gegensatz zur Varianz σ^2)

Die Formel für die Standardabweichung (der Grundgesamtheit) lautet:

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}((\bar{x}-x_1)^2+\ldots+(\bar{x}-x_n)^2)}$$

Bsp 1: Bei einem Spiel, das du täglich spielst, erzielst du am ersten Tag 2 Punkte, am zweiten 5 und am dritten leider wieder nur 2.
Womit rechnest du an den nächsten Tagen im Schnitt?

Berechnung des Mittels: $\bar{x}=\frac{2+5+2}{3}=\frac{9}{3}=3$
Im Schnitt holst du 3 Punkte. Das würdest du so ungefähr wohl auch für die kommenden Tage erwarten.
Aber wie stark kannst du danebenliegen?
Um das zu beurteilen schaust du dir die quadratischen Abweichungen an:

Berechnung der quadratischen Abweichungen:
1. Tag: 2 statt 3 Punkte, also 1 zu wenig: 3-2=-1. Diese Abweichung wird quadriert: $(-1)^2=1$
2. Tag: 5 statt 3 Punkte, also 2 mehr: 5-3=2. Diese

Abweichung wird quadriert: $2^2=4$
3. Tag: 2 statt 3 Punkte, also 1 zu wenig: 3-2=-1. Diese Abweichung wird quadriert: $(-1)^2=1$

Berechnung der Streuungsmaße:
Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung:

$$\sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (5-3)^2 + (1-3)^2}{3} = \frac{1+4+1}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2}$$

Bsp. 2: Wie stark streuen die folgenden Ergebnisse?
(2 ; 6 ; 3)

$\bar{x} = \frac{2+6+3}{3} = 3\frac{2}{3}$

$\sigma^2 = \frac{1}{3}\left((3\frac{2}{3}-2)^2 + (3\frac{2}{3}-6)^2 \; (3\frac{2}{3}-3)^2 \right) \approx \underline{\underline{2,888889}}$

Die Standardabweichung ist dann
$\sigma = \sqrt{2,888889} \approx 1,69967317$
Rechnung in Tabellenform

i	x_i	$(\bar{x}-x_i)^2$
1	2	2,77777778
2	6	5,44444444
3	3	0,44444444
a.M.	$\bar{x} \approx 3,66667$	$\sigma^2 \approx 2,88888889$

$\sigma \approx 1,69967317$

Standardabweichung und Varianz einer Zufallsvariable (oder Zufallsgröße):
Gegeben ist die Zufallsvariable X mit der Ergebnismenge
$\Omega = \{a_1 ; \ldots ; a_n\}$
und dem Erwartungswert $\mu = \sum_{i=1}^{n} P(X=a_i)\cdot a_i$
Dann ist die Varianz von X
$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} P(X=a_i)\cdot(a_i-\mu)^2$
Was das bedeutet wird wohl eher an einem Beispiel klar:

Bsp 1: Werfen eines fairen Würfels; Bei einer Sechs gewinnt man 10 € (a_1=10), bei einer anderen Augenzahl über 3 (also 4 oder 5) gewinnt man 1 € (a_2 =1), bei einer Augenzahl unter 4 verliert man 5 € (a_3 =-5).
$\Omega = \{-4, 1, 10\}$;
$\mu = \frac{1}{6}\cdot 10 + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-5) = -\frac{1}{2}$

a_i	$P(X=a_i)$	$(a_i-\mu)^2$	$P(X=a_i)\cdot(a_i-\mu)^2$
10	$\frac{1}{6}$	90,25	15,041667

1	$\frac{1}{3}$	0,25	0,083333
-5	$\frac{1}{2}$	30,25	15,125
			$\sigma^2 = 30{,}25$
			$\sigma = \sqrt{30{,}25} = 5{,}5$

Bem.: Das ist recht aufwändig.
Viel leichter ist die Berechnung der Standardabweichung bei der Binomialverteilung.
Ist X binomialverteilt mit den Parametern n und p, so gilt:

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Die Standardabweichung bei Binomialverteilungen spielt eine wichtige Rolle bei den Sigma-Regeln.
Eine wichtige Anwendung sind Hypothesentests.

Bsp.: Beim 400-maligen Werfen eines fairen Würfels wird die Häufigkeit gezählt, mit der die „Fünf" fällt.
X ist B_p^n-verteilt mit $n = 400$ und $p = \frac{1}{6}$.

$\sigma = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 7{,}45$

Bem.: Wenn man allerdings die Streuung einer Grundgesamtheit mit Hilfe von Daten einer Stichprobe bestimmen will, muss man die empirische Varianz verwenden, also durch $n-1$ teilen statt durch n („empirische Standardabweichung").

FAQ: *Warum benutzt man statt der mittleren quadratischen Abweichung nicht die mittlere Abweichung als Abweichungsmaß?*

Wenn man die Differenzen der einzelnen Werte vom Mittelwert benutzen würde, würden sich wegen der unterschiedlichen Vorzeichen gegenseitig genau ausgleichen und es käme immer Null heraus. (Das nennt man die Ausgleichseigenschaft des arithmetischen Mittels).

Warum benutzt man statt der mittleren quadratischen Abweichung nicht die absolute Abweichung als Abweichungsmaß?

Ein Grund hierfür ist, dass dann auch viele kleine Abweichungen verhältnismäßig stark eingehen würden: hundert Werte, die um 0,1 von $\bar{x}$ abweichen würden zum gleichen Ergebnis führen wie ein Wert, der um 10 von $\bar{x}$ abweicht. Man erwartet aber „viele kleine“ Abweichungen – diese sollen das Abweichungsmaß daher nicht sonderlich in die Höhe trieben, während einzelne größere Abweichungen stärker eingehen sollen. Das wird durch die Quadratur der Abweichungen erreicht.

Mehr dazu (härterer Tobak): mathepedia

Lehrfilm zu Mittelwert und Standardabweichung: http://www.mathe-online.at/clips/mwstdabw/index.html