Glossar: Polynomdivision

Polynomdivision [Analysis]

Verfahren, das hauptsächlich zur Nullstellenbestimmung bei ganzrationalen Funktionen eingesetzt wird.

Es lässt sich am besten anhand eines Beispiels erklären:
Gesucht sind die Nullstellen von

$$f(x) = -2\,x^3 + 14\,x^2 - 8\,x - 24$$

Irgendwie (vielleicht durch Ausprobieren) haben wir vorher herausgefunden, dass 2 eine Nullstelle ist. Zusammen mit der Nullstelle $x = 2$ kennen wir damit den zugehörigen Linearfaktor $(x-2)$, denn der ergibt ja offensichtlich Null, wenn man $x = 2$ einsetzt. Mittels Polynomdivision teilen wir nun den Funktionsterm durch $(x-2)$:

$(-2\,x^3 + 14\,x^2 - 8\,x - 24) : (x - 2) = ?$

1. Schritt: Wie oft „passt x in $-2x^3$?
$(-2x^3 + 14x^2 - 8x - 24) : (x - 2) = -2x^2 + ?$

2. Schritt: $-2x^3 \cdot (x-2)$ berechnen (wie bei der schriftlichen Multiplikation)

$-2x^3 \cdot (x-2) = -2x^3 + 4x^2$, also:
$(-2x^3 + 14x^2 - 8x - 24) : (x - 2) = -2x^2 + ?$
$\underline{-(-2x^3 + 4x^2)}$

3. Schritt:
Danach wird subtrahiert (Achtung: Minus mal Minus = Plus) und nach dem Schema weitergerechnet:

Vollständig aufgeschrieben:

$$\begin{array}{l}
(-2x^3 + 14x^2 - 8x - 24) : (x - 2) = -2x^2 + 10x - 12 \\
\underline{-(-2x^3 + 4x^2)} \\
\qquad\quad 10x^2 - 8x \\
\qquad \underline{-(10x^2 - 20x)} \\
\qquad\qquad\qquad 12x - 24 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(12x - 24)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Bem.: Die Null am Ende sagt dir, dass die Polynomdivision ohne Rest aufgeht.
Wenn du vorher schon wusstest, dass $x = 2$ eine Nullstelle ist, hast du damit eine Kontrolle, ob du richtig gerechnet hast.

Die Polynomdivision ist nun abgeschlossen, aber die Nullstellen sind noch nicht berechnet.

Weiter geht es mit: ,

$f(x) = (x - 2) (-2 x^2 + 10 x + 12) = 0$

$\Leftrightarrow\ x = 2 \vee -2 x^2 + 10 x + 12 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\Leftrightarrow\ x = 2 \vee x^2 - 5 x - 6 = 0 \quad | + 6$ |+quadratische Ergänzung

$\Leftrightarrow\ x = 2 \vee x^2 - 5 x + 2{,}5^2 = 6 + 2{,}5^2$

$\Leftrightarrow\ x = 2 \vee (x - 2{,}5)^2 = 12{,}25 \quad | \pm\sqrt{}$

$\Leftrightarrow\ x = 2 \vee x - 2{,}5 = 3{,}5 \vee x - 2{,}5 = -3{,}5 \quad | + 2{,}5$

$\Leftrightarrow\ x = 2 \vee x = 6 \vee x = -1$

Bem.: Ersatzweise kann man statt der Polynomdivision das Horner-Schema verwenden, um einen Linearfaktor abzuspalten.

Stolperfallen: Hauptstolperfalle sind bei der Polynomdivision wie so oft die Vorzeichenfehler.
Viele Schüler*innen lassen bei der Subtraktion das Minuszeichen und die Klammer weg und schreiben die Polynomdivision folgendermaßen

$(-2 x^3 + 14 x^2 - 8 x - 24) : (x - 2) = -2 x^2 + 10 x - 12$

$\underline{-2 x^3 + 4 x^2}$

$10 x^2 - 8 x$

$\underline{10 x^2 - 20 x}$

$-28 x$ (leider falsch)

Kontrolle, ob es richtig

Links:
mathebaustelle
Übungen zur Polynomdivision:
Strobl: Grundlagen Übungen Lsg
Schulen Regensburg
Arndt Brünner (hervorragendes Applet zum Üben!)

Einführung (auch mit Video) und Multiple-Choice-Aufgaben: unterricht.de

mehr zum Lösen ganzrationaler Gleichungen: Links ganzationale Gleichungen

basistext_gleichungen