Glossar: Horner-Schema

Horner-Schema [Analysis]

Schema, mit dem man auf einfache Weise Funktionswerte einer ganzrationalen Funktion berechnen kann.

Bsp.: $f(x) = -2\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 10.$
Gesucht: Wir suchen einfach mal den Funktionswert an der Stelle $x = 3$, kurz: $f(3)$
Das geht so:
Man legt eine Tabelle an mit den Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = -2\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 10$$

	-2	5	6	-10
$x = 3$				

und füllt sie dann aus:
Start: Man schreibt den Leitkoeffizienten (hier: -2) in das Kästchen darunter.
Die Kästchen rechts davon füllt man nacheinander aus, indem man das bisherige Ergebnis mit x malnimmt und dann den nächsten Koeffizienten (oben in der Tabelle dazu addiert:

	-2	5	6	-10
	↓	·3 ↗ =-6 ↓+5	·3 ↗ =-3 ↓+6	·3 ↗=9 ↓-10
$x = 3$	-2	-1	3	$-1 \;= f(3)$

Bem.: Die grau eingefärbte Zeile dient nur der Erläuterung der Nebenrechnungen.
Normalerweise wird sie nicht mit aufgeschrieben.

Anwendung: Hauptsächlich wird das Horner-Schema verwendet, um ganzrationale Gleichungen zu lösen – also Nullstellen einer ganzrationalen Funktion zu bestimmen.
Voraussetzung dazu ist blöderweise, dass man eine (ganzzahlige) Nullstelle kennt oder findet.

Das Horner-Schema konkurriert dabei mit der Polynomdivision, sie meist zum selben Zweck benutzt wird.

Mit dem Einsetzen einer Zahl a ins Horner-Schema kann man ein Polynom durch den linearen Term $(x - a)$ teilen – also wie bei der Polynomdivision eine Zerlegung in (Linear-)Faktoren zu bewerkstelligen. Die Zwischenergebnisse des Horner-

Schemas entsprechen dabei den Koeffizienten der Lösung. Das Endergebnis – also $f(a)$ – ist der Rest.

Wenn also beim Horner-Schema Null herauskommt, gibt es keinen Rest: Man hat eine Möglichkeit gefunden, den linearen Term $(x-a)$ abzuspalten:

Bsp.: $f(x) = -2\,x^3 + 5\,x^2 + 6\,x - 9$.
Bekannt: Eine Nullstelle liegt bei $x = 3$.
Gesucht: Faktorisierung / weitere Nullstellen.

	-2	5	6	-9
	↓	·3 ↗ =-6 ↓+5	·3 ↗ =-3 ↓+6	·3 ↗=9 ↓-12
$x = 3$	-2	-1	3	$\underline{\underline{0}} = f(3)$

<u>Ergebnis</u>: $f(x) = (x-3)\,(-2x^2 - x + 3)$

Nach dem Satz vom Nullprodukt gilt:
$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \vee -2x^2 - x + 3 = 0$ (nun lösbar mit quadratischer Ergänzung)
$x = 3 \vee -2x^2 - x + 3 = 0$ | :(-2)
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x^2 + \frac{1}{2}\,x - 1{,}5 = 0 \mid +1{,}5 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{16}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \vee x + \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$
$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1 \vee x = -1{,}5$
Damit sind alle drei Nullstellen berechnet.

Geschichte: Das Horner-Schema stammt aus der Zeit vor Erfindung des Taschenrechners - die Suche nach Rechenvereinfachungen hatte also eine eminent praktische Bedeutung.
Der englische Mathematiker Sir William George Horner (1786–1837) hat dieses Verfahren entwickelt und publiziert – er hat es allerdings nicht als erster entdeckt.

Links:

mathebaustelle
Erläuterungen und Beispielaufgaben mit Lösungen: http://fbmathe.bbs-bingen.de/HornerSchema/uebungHorner.htm (Aufruf 01/2019)
https://matheguru.com/algebra/horner-schema-zur-polynomdivision.html (12/2020)
mehr zum Lösen ganzrationaler Gleichungen: Links ganzationale Gleichungen
basistext_gleichungen