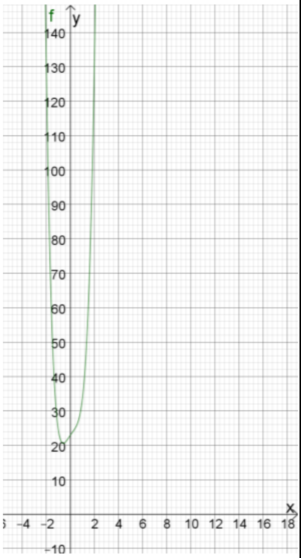
Lore Lorentz
LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: ganzrationale Funktion

Funktion, ganzrationale [Analysis]

Funktion, deren Term sich auf die Form
$\boldsymbol{a_n\ x^n} + \ldots\ \boldsymbol{a_1\ x} + \boldsymbol{a_0}$ bringen lässt, wobei a_n , …, a_0 reelle Zahlen sind, $a_n \neq 0$.
Diese Form heißt Normalform, die Zahlen a_n , …, a_0 heißen Koeffizienten.
Ein Term dieser Form heißt Polynom. Der höchste darin auftretende Exponent n heißt Grad, der Vorfaktor a_n heißt Leitkoeffizient.

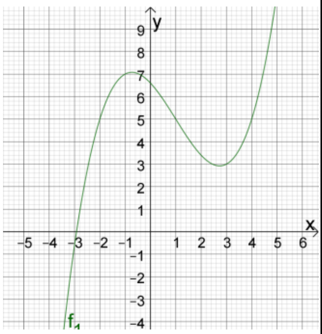
Beispiel 1: h mit
$h(x)$
$= -0{,}25x^5$ +7 x^4 – x^2+5 x+23.
Der Grad von h ist 5, die Koeffizienten sind: a_5 = -0,5, a_4 = 7, a_3 = 0 („0 · x^3“ könnte man im Term ja hinschreiben), a_2 = -1 (man könnte ja „-1 · x^2“ schreiben , a_1 = 5, a_0 = 23.
Der Grad ist in diesem Fall 5, der Leitkoeffizient –0,25.
Ein Ausschnitt des Graphs ist rechts abgebildet. Ob hier alles Wesentliche im Bild ist, müssen wir aber noch klären ..



Bsp. 2
Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3:

$$f_1(x) = 0{,}2x^3 - 0{,}6x^2 - 1{,}2x + 6{,}6$$

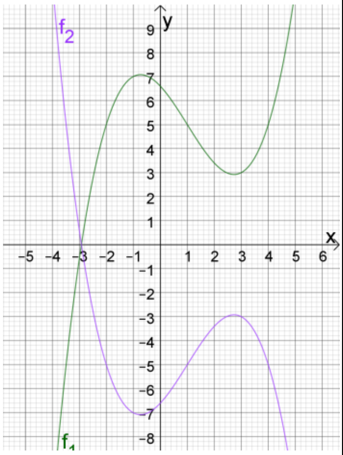
So sieht „typischerweise“ der Graph einer kubischen Funktion aus (Grad 3):
Er steigt erst, dann fällt er, um danach wieder zu steigen.



Bsp. 3
Genauso gibt es natürlich auch kubische Funktionen, die genau umgekehrt verlaufen und erst fallen, dann steigen,

dann wieder fallen, z.B. $f_2(x) = -f_1(x)$
$= f_1(x) = -0{,}2x^3 + 0{,}6x^2 + 1{,}2x - 6{,}6$

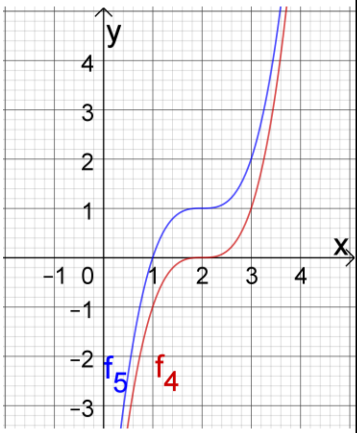
Im Diagramm siehst du, wie f_1 und f_2 zusammenhängen:



Andere kubische Funktionen steigen (oder fallen) durchgehend:

Bsp. 4 und 5:

$f_3(x) = (x-2)^{\mathbf{3}}$
$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$
$f_4(x) = (x-2)^{\mathbf{3}} + \mathbf{1}$
$= x^3 - 6x^2 + 12x - 7$



Bem. 1:
Viele einfachere ganzrationale Funktionen sind den meisten längst gut bekannt:
Konstante Funktionen sind ganzrationale Funktionen vom Grad 0.
Lineare Funktionen, die nicht ausgerechnet konstant sind, sind ganzrationale Funktionen vom Grad 1.
Quadratische Funktionen sind ganzrationale Funktionen vom Grad 2.
Funktionen vom Grad 3 nennt man auch kubische Funktionen

Basistext: basistext_funktionen_ganzrationale.pdf

Werbeeinlage:
Ganzrationale Funktionen gaben ein paar fast unschlagbare Eigenschaften:
Sie sind sehr einfach – gerade wenn man sich mit Differentialrechnung beschäftigt, denn jede Ableitung ist wieder von einem geringeren Grad (also einfacher) als die ursprüngliche Funktion.
Viele Regeln sind leicht überschaubar (Fernverhalten, Anzahl der Nullstellen, Symmetrie zum Koordinatensystem).

Damit soll nicht gesagt sein, dass man alles sofort überblicken und verstehen müsste – aber es ist sicher „relativ einfach“ verglichen mit anderen Funktionenklassen.

Wichtige Sätze über ganzrationale Funktionen sind:
Fernverhalten:
Eine Funktion f mit positivem Leitkoeffizienten a hat für x gegen unendlich den Grenzwert ∞.
Eine Funktion f mit negativem Leitkoeffizienten a hat für x gegen unendlich den Grenzwert $-\infty$.
Bei einer Funktion mit geradem Grad stimmen die Grenzwerte für x gegen unendlich und für x gegen minus unendlich überein.
Bei einer mit ungeradem Grad unterscheiden sie sich.
Nullstellen:
Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n kann höchstens n Nullstellen haben.
Extremstellen:
Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n kann höchstens $n-1$ Extremstellen haben.
Wendestellen:
Eine ganzrationale Funktion f vom Grad n kann höchstens $n-2$ Wendestellen haben.

Übersicht über Ansätze zu Aufgaben:
uebersicht_ansaetze_ganzrationale_funktionen.pdf

Funktionsuntersuchung: Kurvendiskussion.

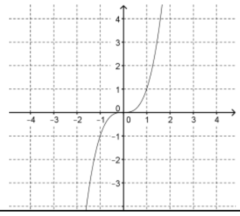
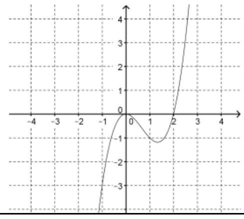
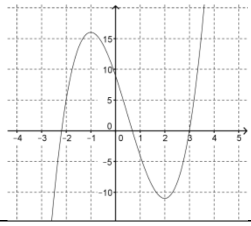
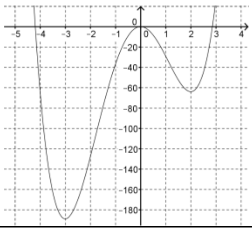
Beispiele für die Untersuchung ganzrationaler Funktionen findest du in der Funktionensammlung

Alles klar? Check ganzrational Grad 3

Übungsaufgaben:
ab_ganzrationale_funktionen_nullstellen_extrema_und_wendepunkte.pdf

Links:
Grad erkennen: http://www.mathe-online.at/tests/var/polynome.html
Kurvendiskussion: http://www.mathe-profis.de/index.php?page=klasse_11/kurvendiskussion.

Weitere Beispiele:

$f(x) = x^3$	
$f(x) = x^3 - 2x^2$	
$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$	
$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 - 2x$	
$f(x) = -x^3 + 1{,}5x^2 + 18x - 40{,}5$	
$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2$	
$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + 27$	

Weitere Beispiel unter Polynomfunktionen bei sos-mathe