Glossar: Faktorisierte Form

Form, faktorisierte der Gleichung oder des Terms einer ganzrationalen Funktion [Analysis]

Term einer ganzrationalen Funktion der (soweit möglich) in Form eines Produkts aus sogenannten Linearfaktoren dargestellt ist:

z.B. $f(x) = 0{,}5\,(x-2)\cdot(x+5)^2$

Bei einer Zerlegung erhält man folgende Arten von Faktoren:
den Leitkoeffizienten a (im Beispiel ist $a = 0{,}5$)
Linearfaktoren der Form ($x - x_k$), wobei x_k eine Nullstelle von f ist (im Beispiel gehört zum Linearfaktor $(x-2)$ die Nullstelle $x = 2$ und zu $(x+5)^2$ die doppelte Nullstelle $x = -5$)
außerdem können auch quadratische Faktoren vorkommen, die selbst keine Nullstellen haben und sich daher nicht weiter zerlegen lassen (z.B. (x^2+1)).

Der Grad der Funktion ist die Summe der Exponenten ($0{,}5\,(x-2)^1\cdot(x+5)^2$ hat den Grad $1+2=3$)

Beispiel 2: $f(x) = 2\,x^2 + 4\,x - 30 = 2\,(x-3)\,(x+5)$.
Dabei ist $2\,x^2 + 4\,x - 30$ die Normalform
und $2\,(x-3)\,(x+5)$ die faktorisierte Form.
2 ist der Leitkoeffizient, (x – 3) und (x + 5) sind Linearfaktoren.
Der Grad ist 2 (quadratische Funktion).

Ansatz zur Bestimmung der faktorisierten Form aus der Normalform: Nullstellenbestimmung von f. Aus jeder berechneten Nullstelle macht man den zugehörigen Linearfaktor.

Anwendung bzw. **Vorteil** der faktorisierten Form: An der faktorisierten Form lassen sich mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt die Nullstellen unmittelbar ablesen, man braucht dazu bei den in den Linearfaktoren hinter x stehenden Zahlen nur das Vorzeichen zu ändern.

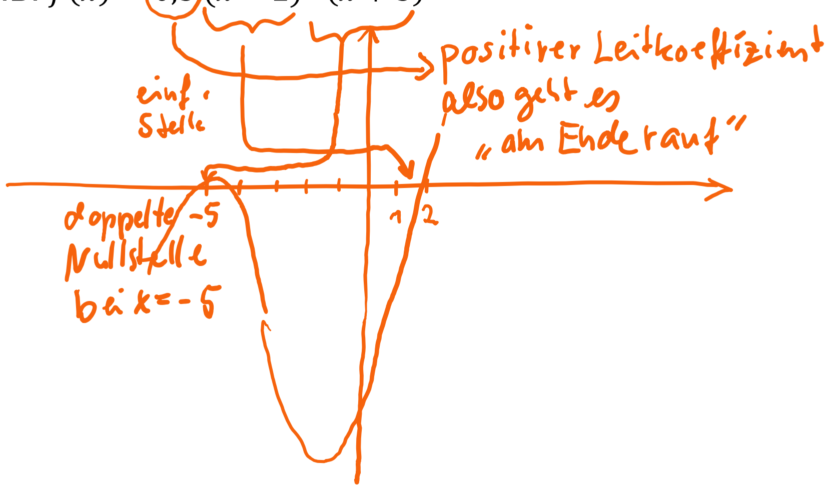
Beispiel 3: $2\,(x-3)\,(x+5) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -5$ (Vorzeichen ändern sich).

Beispiel 4: Nullstellen von $-3x^3 - 15x^2 - 12x$:.
$-3x^3 - 15x^2 - 12x = 0$ | :(-3)

$\Leftrightarrow x^3 + 5x^2 + 4x = 0 \mid x$ ausklammern
$\Leftrightarrow x\,(x^2 + 5x + 4) = 0 \mid$ Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 5x + 4 = 0 \mid$ quadratische Ergänzung
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 = 25/4 - 16/4$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee \left(x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^2 = \frac{9}{4} \mid \pm\sqrt{}$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x + \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \vee x + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$
$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = -4$

Faktorisierte Form dieser Funktion aufstellen:
Nun entspricht $x = 0$ dem Linearfaktor x (nämlich $(x - 0)$),
$x = -1$ entspricht dem Linearfaktor $(x + 1)$ (hierbei ändert sich also das Vorzeichen),
$x = -4$ entspricht dem Linearfaktor $(x + 4)$ (wie immer ändert sich also das Vorzeichen)
Faktorisierte Form: $f(x) = \underline{\underline{-3\,x\,(x + 1)\,(x + 4)}}$

Mit Hilfe der faktorisierten Form kannst du schnell zu einer Skizze des Funktionsgraphen kommen:
z.B. $f(x) = 0{,}5\,(x - 2) \cdot (x + 5)^2$



An der faktorisierter Form einer ganzrationalen Funktion kann man recht schnell sehen, wie der Graph verläuft:
Man muss nur den Unterschied kennen zwischen einfacher Nullstelle, doppelter Nullstelle und dreifacher Nullstelle

Links:

Erklärfilm ganzrationale Gleichungen - mit Vorarbeiten (teilweise schon faktorisiert) mp4
Erklärfilm Skizzieren des Graphs einer ganzrationalen Funktion (faktorisierte Form) mp4
Faktorisierte Form bei **quadratischen Funktionen: hier**
Faktorisierte Form bei **kubischen Funktionen: hier**
Faktorisierung mit dem **Nspire CAS: hier**

Übungsaufgaben:
http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/fqt.htm