Glossar: faktorisierte Form

faktorisierte Form einer quadratischen Funktion [Analysis]

Eine Gleichung der Form $f(x) = a \cdot (x - x_{N1}) \cdot (x - x_{N2})$, beschreibt immer eine quadratische Funktion, wobei x_{N1} und x_{N1} beliebige reelle Zahlen sind,
der sogenannte Leitkoeffizient a darf allerdings nicht Null sein.

Beispiel: $f(x) = 2\ (x\text{–}3)\ (x\text{–}5)$ ist demnach eine quadratische Funktion.

Man kann sie durch Ausmultiplizieren auf Normalform bringen:

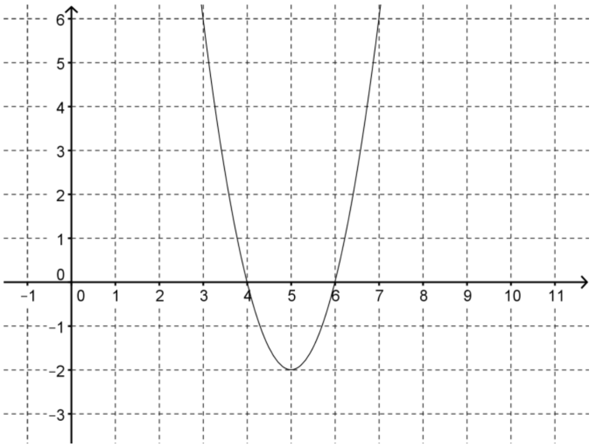
$2(\ x - 3\ )\ (\ x - 5\ )$

$= 2\ (\ x^2 - 3\ x - 5\ x + (-3)\cdot(-5))$
$= \underline{2\ x^2 - 16\ x + 30}$

Die faktorisierten Form ist sozusagen die Luxus-Edition der Funktionsgleichung:
Man kann bei ihr die Nullstellen sofort ablesen:
$2\ (\ x - 3\ )\ (\ x + 5\ )$ kann nur Null werden, wenn $x\ -3$ Null ist (also $x = 3$) oder wenn $x\ +5$ Null ist (also $x =$ -5).
Nullstellen bestimmen ist also nicht schwieriger als Vorzeichen herumzudrehen!

Aufstellen von Funktionsgleichungen, wenn die Nullstellen vorgegeben sind
Suchst du also eine quadratische Funktion mit den Nullstellen 2 und -10, so ist jede Funktion $a \cdot (\ x - 2\ )\ (\ x + 10\ )$ geeignet.
Das a kannst du dir aussuchen, nur die Null ist verboten.
Beachte, dass du das Vorzeichen „herumdrehen“ musst.

Bsp. 1:
$f(x) = 2\ x^2 - 20\ x + 48$
Null setzen: $f(x) = 0$
$\Leftrightarrow\ \ 2\ x^2 - 20\ x + 48 = 0$
$\Leftrightarrow\ \ x^2 - 10\ x + 24 = 0$ | quadratische Ergänzung
$\Leftrightarrow\ \ x^2 - 10\ x + 25 = -24 + 25$
$\Leftrightarrow\ \ (\ x - 5\ )^2 = 1$
$\Leftrightarrow\ \ x - 5 = 1 \lor x - 5 = -1$
$\Leftrightarrow\ \ x = 6 \lor x = 4$
Also ist $f(x) = a\ (\ x - 6\ )\ (\ x - 4\ )$. Der Leitkoeffizient a ist aus der Normalform bekannt: $a = 2$, also $f(x) = \underline{2\ (\ x - 6\ )\ (\ x - 4\ )}$



Bsp. 2:
$f(x) = 2\,x^2 - 20\,x + 50$
Null setzen: $f(x) = 0$
$\Leftrightarrow\ 2\,x^2 - 20\,x + 50 = 0$
$\Leftrightarrow\ x^2 - 10\,x + 25 = 0$ Das ist schon ein Binom!
$\Leftrightarrow\ (x - 5)^2 = 0$
$x = 5$ ist eine doppelte Nullstelle.

Mit dem TI-Nspire CAS geht all das ohne große Umstände: hier

Umformen zur faktorisierten Form
Um die faktorisierte Form zu einer vorgegebenen Funktion zu ermitteln, muss man daher die Nullstellen bestimmen. Wenn die Funktion keine Nullstellen hat, dann ist *keine Zerlegung möglich*: Sie kann dann nicht (weiter) faktorisiert werden.
Ein Sonderfall ist, wenn eine quadratische Funktion nur eine Nullstelle hat. Dies ist dann eine doppelte Nullstelle.
Die faktorisierte Form von $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Kannst du´s?
Nullstellen aus der faktorisierten Form ablesen und eine quadratische Funktion zu vorgegebenen Nullstellen basteln: **Check**
Die Normalform in die faktorisierte Form umformen: **Check**
Die faktorisierte Form in die Normalform umformen: **Check**

Stolperfallen:

Wenn man die Nullstellenberechnung hinkriegt und auch daran denkt, die Vorzeichen der Nullstellen für die Linearfaktoren herumzudrehen, wird immer noch gerne der Leitkoeffizient vergessen:
$f(x) = 2x^2 - 20x + 48 = 0$ wir richtig gelöst:
$\ldots \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 4$
falsche Antwort: $f(x) = (x - 6)(x - 4)$ statt
$f(x) = 2(x - 6)(x - 4)$

Faktorisierte Form allgemein: hier
Faktorisierte Form bei kubischen Funktionen: hier
Faktorisierung mit dem Nspire CAS: hier

Links zu quadratischen Funktionen: hier