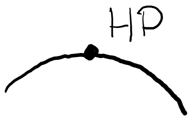
Glossar: lokale Extremstelle

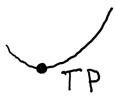
Extremstelle, lokale [Analysis, Differentialrechnung]

Überbegriff für lokale Maximalstelle und Minimalstelle.

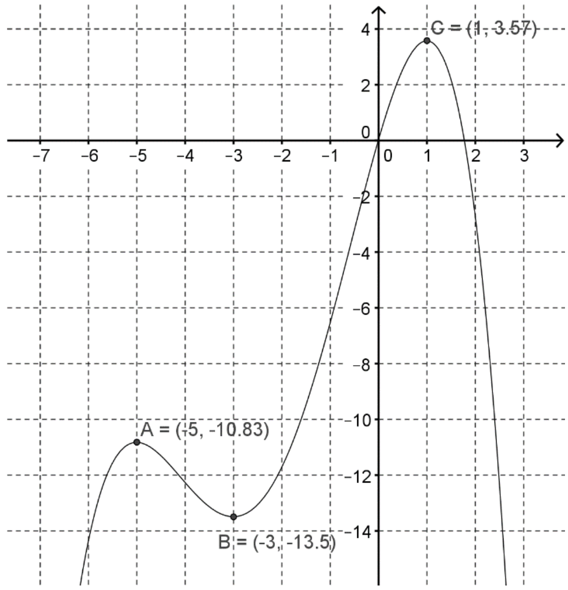
Wenn keiner der Funktionswerte, die f ein kleines Stück links von x_0 und ein kleines Stück rechts von x_0 annimmt, größer ist als f(x_0),
heißt x_0 lokale Maximalstelle und $(x_0|f(x_0))$ lokaler Hochpunkt.



Wenn keiner der Funktionswerte, die f ein kleines Stück links von x_0 und ein kleines Stück rechts von x_0 annimmt, kleiner ist als f(x_0),
heißt x_0 lokale Minimalstelle und $(x_0|f(x_0))$ lokaler Tiefpunkt.



Wenn x_0 lokale Maximal- oder Minimalstelle ist, heißt x_0 lokale Extremstelle (als Sammelbegriff). Der zugehörige Punkt heißt dann lokaler Extrempunkt.



Erläuterung am Bild: (Bsp. 1)

$$f(x) = -0{,}1x^4 - 0{,}9333\,x^3 - 1{,}4x^2 + 6x$$

lokale Maximalstellen bei $x = -5$ und bei $x = 1$, lokale Minimalstelle bei $x = -3$.
lokale Hochpunkte: A(-5|10,83) und B(1|3,57),
lokaler Tiefpunkt bei C(-3|-13,5).

Nochmal für Freunde des mathematischen Sprachgebrauchs: (Das verlangt einige Konzentration, ist aber nicht zwingend erforderlich, um zu verstehen, was Extremstellen sind):

Def.:
Eine Zahl x_0 aus dem Inneren der Definitionsmenge der Funktion f heißt lokale Extremstelle von f,
wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in$ U (x_0)
(dann heißt x_0 lokale Maximalstelle)
oder $f(x_0) \leq f(x)$ für alle $x \in U$
(dann heißt x_0 lokale Minimalstelle);

Bem: Bei differenzierbaren Funktionen gilt:
x_0 kann nur dann eine lokale Extremstelle sein, wenn x_0 im Innteren der Definitionsmenge liegt (also: nicht am Rand) und der Graph von f dort eine waagerechte Tangente hat.

Berechnung:
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
hinreichende Bedingung: zusätzlich $f''(x) \neq 0$

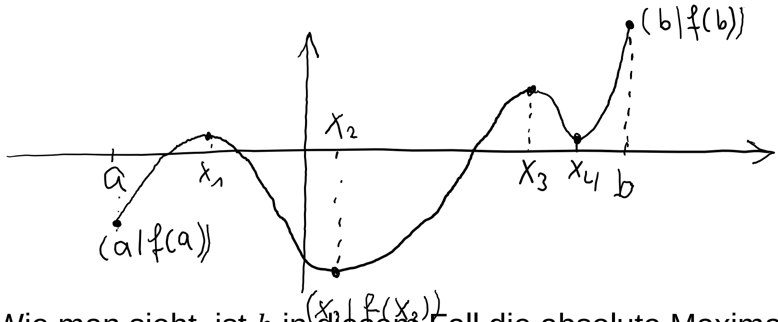
alternativ: Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung f'.

Beispiele für Untersuchung auf Extremstellen:
quadratisch: Bsp. 1,
kubisch: Bsp. 1, Bsp. 2, Bsp. 3, Bsp. 4,
außerdem: siehe Funktionensammlung

Beispielrechnung/-dokumentation mit **Nspire CAS**: hier

Erweiterung 1:
Wenn die lokalen Extrempunkte berechnet werden sollen, müssen noch die y-Koordinaten (also die entsprechenden Funktionswerte) berechnet werden.

Erweiterung 2:
Wenn es nicht nur um lokale Extremstellen oder -punkte geht, sondern um den „1. Platz unter den Extrema", also absolute Extrema, dann muss auch der Rand betrachtet werden:
Wenn die Definitionsmenge ein abgeschlossenes Intervall $[a; b]$ ist, setzt man einfach a und b in die Funktion ein und vergleicht:



Wie man sieht, ist b in diesem Fall die absolute Maximalstelle und x_2 die absolute Minimalstelle, da zuzu jeweils der höchste bzw. tiefste Punkt in der ganzen Definitionsmenge gehört.
x_1, x_2, x_3 und x_4 sind lokale Extremstellen – x_2 ist also beides gleichzeitig, das schließt sich nicht aus.

weitere Links zum Thema [Differentialrechnung]

$(x_2|f(x_2))$