Horner-Schema und Nullstellenbestimmung

Erinnerung: Eine ganzrationale Funktion dritten Grades (kubische Funktion) hat mindestens eine und höchstens drei Nullstellen.

Bei einer kubischen Funktion, die nur ganzzahlige Koeffizienten hat, gilt:
Wenn es überhaupt eine ganzzahlige Nullstelle gibt, muss es sich um einen Teiler des y-Achsenabschnitts oder um das Negative eines solchen Teilers handeln.

Beispiel: $f(x) = -2\,x^3 + 30\,x^2 + 50\,x - 750 = 0$
Systematisches Probieren: Die Teiler von 750 und ihre Negativen;
1 klappt nicht, -1 auch nicht, 2 nicht, -2 nicht, Erfolg bei $x = 5$:

Hier zur Erläuterung das Hornerschema mit Zwischenergebnissen:

	Koeffizienten von f			
	-2	**30**	**50**	**-750**
Zwischen-rechnung	*-2 (von oben übertragen)*	***-2 · 5*** ***+30***	***-20 · 5*** ***+50***	***150 · 5*** ***- 750***
$\underline{x = 5}$	**-2**	**20**	**150**	0= $f(5)$
Eingesetzte Zahl	**Koeffizienten des Ergebnisterms der Abspaltung**			*Ergebnis*

So viel will kein Mensch aufschreiben (Das Schema soll ja Arbeit *sparen*), also schreibt man:

x	-2	30	50	-750
5	**-2**	**20**	**150**	0

Dies liefert dasselbe Ergebnis wie eine **Polynomdivision** durch den Linearfaktor $(x - 5)$ (Man dividiert dabei durch $(x - 5)$, weil dieser Linearfaktor genau zu der Nullstelle $x = 5$ gehört. Man erkennt das Prinzip sofort, wenn man $x = 5$ in $(x - 5)$ einsetzt.)

Hier wird die Polynomdivision durchgeführt:

$(\mathbf{-2}\,x^3 + 30\,x^2 + 50\,x - 750) : (x - 5) = \mathbf{-2}\,x^2 + \mathbf{20}\,x + \mathbf{150} = 0$

$\underline{-(-2\,x^3 + 10\,x^2)}$ $\quad -(\mathbf{-2}\,x^2 \cdot (x - 5))$

$\quad \mathbf{20}\,x^2 + 50\,x$

$\quad \underline{-(20x^2 - 100\,x)}$ $\quad -(\mathbf{20}\,x \cdot (x - 5))$

$\qquad \mathbf{150}\,x - 750$

$\qquad \underline{-(150\,x - 750)}$ $\quad -(\mathbf{150} \cdot (x - 5))$

$\qquad\qquad 0$

Bemerkung: Wer sich noch einmal klar macht, wie die ganz normale schriftliche Division funktioniert, hat mit der Polynomdivision meist wenig Schwierigkeiten.

Die Zwischenergebnisse des Horner-Schemas

-2	**20**	**150**

Werden nun also als Koeffizienten eines abgespaltenen Polynoms aufgefasst:
$\mathbf{-2}\,x^2 + \mathbf{20}\,x + \mathbf{150}$

Da dieses Polynom einen kleineren Grad hat, sind wir der Lösung der Gleichung einen Schritt näher. Der Rest geht z.B. mit quadratischer Ergänzung:

$f(x) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee \mathbf{-2}\,x^2 + \mathbf{20}\,x + \mathbf{150} = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x^2 - 10\,x - 75 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x^2 - 10\,x = 75$

$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x^2 - 10x + 25 = 100$
$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee (x - 5)^2 = 100$
$\Leftrightarrow \quad x = 5 \vee x - 5 = -10 \vee x - 5 = 10$
$\Leftrightarrow \quad x = \underline{\underline{5}} \vee x = \underline{\underline{-5}} \vee x = \underline{\underline{15}}$
Antwort: Die Nullstellen von f sind –5, 5 und 15

Quizfrage: Wie lautet die Funktionsgleichung von f in faktorisierter Form?

beliebte Fehler

Hinweis auf **Stolpersteine**: Viele lassen bei der Polynomdivision gerne die Klammern weg und schreiben
„$\underline{20x^2 - 100x}$“ statt
„$\underline{-(20x^2 - 100x)}$“
Das geht meistens bei den negative Zahlen schief: Man muss ja letztlich +100 x rechnen (nämlich: -(-100x)).

Noch ein Hinweis auf **Stolpersteine**: Koeffizienten in eine Tabelle eintragen ist gar nicht so einfach: $-2x^3 + x$ muss folgendermaßen eingetragen werden:

x	-2	0	1	0

(Warum eigentlich?)

Das entsprechende Problem entsteht übrigens auch bei der Polynomdivison.
Es ist hilfreich, zu ergänzen und hinzuschreiben: $-2x^3 + 0\,x^2 + x + 0$

Links: Basistext Gleichungen

Übungen

Bestimme alle Nullstellen von f – wenn möglich

Aufgabe	***Lösung***
a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x^2 - 19x - 30$	$x = -2 \vee x = -3 \vee x = 5$
b) $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 10x + 6$	*[= 2(x-3)(x^2-2x-1)];* $x = 3 \vee x \approx$ *-0,41* $\vee x \approx$ *2,41*
c) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 11x - 12$	*[=(x – 4) (x^2 + 2 x – 3)];* $x = 4 \vee x = -3 \vee x = 1$
d) $f(x) = x^3 + x^2 - x - 10$	$x = -2 \vee x \approx$ *-4,1926* $\vee x \approx$ *1,1926*
e) $f(x) = 0{,}5x^3 + 2{,}5x^2 + 0{,}5x - 5$	$x = 2$ *(keine weitere Lösung)*
f) $f(x) = 3x^3 - 12$	$x \approx$ *1,5874*
g) $f(x) = 10x^5 - 40x^4 + 10x^3 + 60x^2$	$x = 0$ *(doppelte Nullstelle)* $\vee x = -1 \vee x = 2 \vee x = 3$
h) $f(x) = 2(x - 4)(x^2 + 2x - 3)$	$x = 4 \vee x = -3 \vee x = 1$ *(s. o.)*
i) $x^5 + 7x^4 - 2x^3 - 14x^2 + x + 7$	$x = 1$ *(doppelt)* $\vee x = -1$ *(doppelt)* $\vee x = 7$

Stell dir selbst eine Aufgabe dieser Art.

- **Bestimme dazu** eine Funktion dritten Grades mit drei ganzzahligen Nullstellen. Wähle dazu drei beliebige Nullstellen, z.B., 1, -2, 4 und einen Vorfaktor, z.B. 2; stell die faktorisierte Form dazu auf, also $2 (x - 1) (x + 2) (x - 4)$.
  Löse die Klammern auf. So erhältst du einen ganzrationale Funktion, die du auf Nullstellen untersuchen kannst – die Ergebnisse zur Kontrolle kennst du dann schon ...

Für Fortgeschrittene:

- Bestimme eine Funktion dritten Grades mit einer ganzzahligen und zwei irrationalen Nullstellen;
- Bestimme eine Funktion dritten Grades die nur eine Nullstelle hat (damit die Aufgabe am Ende lösbar ist, sollte diese Nullstelle ganzzahlig sein).