

## Lerngerüst Stochastik

Thema	Bemerkungen und Erläuterungen
<b>Stochastik</b>	<p>Ein nützliches Werkzeug zur Auseinandersetzung mit der Stochastik ist das Programm (oder besser: Die Programm- und Datei-Sammlung) Stochastik-Studio, enthalten in dem Berlin-Brandenburger Mathematik-USB-Stick <a href="http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/usb-stick.html">http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/usb-stick.html</a></p> <p>Einen schönen und leicht lesbaren Überblicksartikel über die Statistik hat <a href="#">Krämer</a> geschrieben:</p> <p>Schöner Einstieg in die Grundlagen: <a href="http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/">http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/</a></p> <p>Umfangreiche Skripte für die Schule mit sehr vielen Übungsaufgaben: <a href="http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/j3/images/mathe_os/abitur/01-stochastik-skript.pdf">http://www.joerg-rudolf.lehrer.belwue.de/j3/images/mathe_os/abitur/01-stochastik-skript.pdf</a> und <a href="http://www.mathe-physik-aufgaben.de/mathe_uebungen_stochastik/Aufgaben-M-Stochastik.pdf">http://www.mathe-physik-aufgaben.de/mathe_uebungen_stochastik/Aufgaben-M-Stochastik.pdf</a></p> <p>Eine brauchbare Einführung - mit wenigen Ausnahmen auf Schulniveau: <a href="http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/2011/HM3/HM3-Kapitel-4.pdf">http://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/2011/HM3/HM3-Kapitel-4.pdf</a> (120 S., aber man muss ja nicht alles lesen...)</p> <p>Lernspirale (gute Übersicht für Lehrer): <a href="#">austromath</a></p>
<b>Beschreibende Statistik in einer Variable (univariat)</b>	<p>Dabei geht es um relative und absolute Häufigkeiten, Darstellungen durch Diagramme, Lage- und Streuungsparameter</p> <p>Lernpfad:.. <a href="#">austromath</a></p> <p>Aufgabenbeispiele: <a href="#">Uni Darmstadt</a> (pdf)</p> <p>Multiple-Choice Test <a href="http://jumbo.uni-muenster.de/fileadmin/jumbo/js/mc-kap1.html">http://jumbo.uni-muenster.de/fileadmin/jumbo/js/mc-kap1.html</a></p>



<p><b>Beschreibende Statistik in zwei Variablen (bivariat)</b></p>	<p>Dabei geht es um den Zusammenhang zwischen zwei Größen.</p> <p>Multiple-Choice Test (Stoffgebiet umfangreicher als an der Schule) <a href="http://jumbo.uni-muenster.de/fileadmin/jumbo/js/mc-kap2.html">http://jumbo.uni-muenster.de/fileadmin/jumbo/js/mc-kap2.html</a></p>
<p><b>Lineare Regression – Regressionsgerade</b></p>	<p>Regressionsgerade schätzen:  <a href="https://www.mathematik.tu-clausthal.de/interaktiv/statistik/regression1/">https://www.mathematik.tu-clausthal.de/interaktiv/statistik/regression1/</a></p> <p>Schöne Visualisierung mit Geogebra:  <a href="http://www.unterrichtsportal-m-ph.de/Peter/geogebra/geogebra3/linreg.html">www.unterrichtsportal-m-ph.de/Peter/geogebra/geogebra3/linreg.html</a></p>
<p><b>Korrelation</b></p>	<p>Nettes Schätzspiel: <a href="http://guessthecorrelation.com/">http://guessthecorrelation.com/</a></p>
<p><b>Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b></p>	<p>Grundbegriffe sind:          Ergebnisse / Ereignisse          Laplace-Wahrscheinlichkeiten          Kombinatorik: Das Zählen von Möglichkeiten.</p> <p><u>Links:</u></p> <p>Kurze Einführung zur Kombinatorik (20 S. umfassen Einführung, Aufgaben, Lösungen als pdf):  <a href="http://www.sopicki.de/download/mathematik/kombinatorik.pdf">http://www.sopicki.de/download/mathematik/kombinatorik.pdf</a></p> <p>11 Aufgaben mit Lösungen von Roolfs (2 S. als pdf)  <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/WrechnungAufg2.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/WrechnungAufg2.pdf</a></p> <p>Aufgabenabfrage zur Kombinatorik (Anfang 2013 erst 6 Fragen):  <a href="http://www.abfrager.de/gymnasium/oberstufe/mathematik/grundkurs/stochastik.htm">http://www.abfrager.de/gymnasium/oberstufe/mathematik/grundkurs/stochastik.htm</a></p> <p>weitere Aufgaben: <a href="#">methods</a>  <a href="#">Binomialkoeffizient</a></p> <p>Einführung von Roolfs mit Aufgaben und Lösungen (2 S. als pdf) <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/WrechnungAufg2.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/WrechnungAufg2.pdf</a></p> <p>Baumdiagramme und Pfadregeln          Stochastische Unabhängigkeit          Einführung des Begriffs Unabhängigkeit bei Roolfs (2 S. als pdf) <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/WrechnungAufg2.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/WrechnungAufg2.pdf</a></p>



	<p><a href="#">gym/Stochastikpdf/Unabhaengigkeit.pdf</a></p> <p><u>Links</u>: eine wunderbare interaktive Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet der Lernpfad <a href="http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/">http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/</a></p> <p>Selbstlernmaterialien: <a href="http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1wk/s1wkindex.html">http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1wk/s1wkindex.html</a></p> <p>zur Kombinatorik: wieder mal aus Wuppertal: <a href="http://www.matheprisma.de/Module/Kombin/index.htm">http://www.matheprisma.de/Module/Kombin/index.htm</a></p> <p>verpackt in Weltraum-Abenteuergeschichten (nicht direkt auf Abiturniveau, aber liebevoll gemacht): <a href="http://www.amustud.de/marianczuk/01.htm">http://www.amustud.de/marianczuk/01.htm</a></p> <p>Empfehlenswerte Linksammlung: <a href="http://www.edugroup.at/praxis/portale/hlfs/hlfs-angewandte-mathematik/stochastik.html">http://www.edugroup.at/praxis/portale/hlfs/hlfs-angewandte-mathematik/stochastik.html</a></p>
<p><b>Bedingte Wahrscheinlichkeit</b></p>	<p>Im Kern handelt es sich um Prozentrechnung. Das Hauptproblem liegt im Verständnis der Aufgabe und Erkennen des richtigen Grundwerts.</p> <p>Hilfsmittel sind:</p> <p>Baumdiagramm, Vierfeldertafel, umgedrehtes Baumdiagramm und der Satz von Bayes</p> <p>Baumdiagramm</p> <p>Vierfeldertafel</p> <p><u>Links</u>: Excel-Seite mit automatisch erzeugter Vierfeldertafel und herumgedrehtem <a href="#">Baum</a> Aufgaben <a href="#">methods</a></p> <p>umgedrehtes Baumdiagramm</p> <p>Satz von Bayes</p> <p><u>Links</u>:</p> <p>Aufgaben: <a href="#">methods</a></p> <p>sehr gute Anwendungsaufgaben mit Lösungen: <a href="http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/smart/gym/j10neu/Stochastik10/pfad10/bedingteW/bedingteW.pdf">http://btmdx1.mat.uni-bayreuth.de/smart/gym/j10neu/Stochastik10/pfad10/bedingteW/bedingteW.pdf</a></p> <p>Viele gute Aufgaben mit Lösungen: <a href="http://www.gymnasium-borghorst.de/wp-content/uploads/2011/06/Aufgabe-zur-bedingten-Wahrscheinlichkeit.pdf">http://www.gymnasium-borghorst.de/wp-content/uploads/2011/06/Aufgabe-zur-bedingten-Wahrscheinlichkeit.pdf</a></p>



	<p>Interaktive Einführung in das Thema am Beispiel Ziegenproblem:  <a href="http://www.matheprisma.de/Module/Ziegen/index.htm">http://www.matheprisma.de/Module/Ziegen/index.htm</a></p> <p>Brinkmann: <a href="http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_08.htm">http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_08.htm</a></p>
<p><b>Bernoulliversuche und Binomialverteilung</b></p>	<p><u>Links</u>: Universal-<u>Tabelle</u> für Binomialverteilungen (Excel)          Interaktive Einführung in das Thema Binomialverteilung (und andere Verteilungen):  <a href="http://www.matheprisma.de/Module/Verteilung/index.htm">http://www.matheprisma.de/Module/Verteilung/index.htm</a>          Selbstlernmaterialien: <a href="http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1wk/be/beindex.html">http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/s1wk/be/beindex.html</a> und <a href="http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/wk/bv/bvindex.html">http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/wk/bv/bvindex.html</a>          Übersicht Aufgabentypen (digitale Schule Bayern):  <a href="http://www.digitale-schule-bayern.de/dsdaten/207/89.pdf">http://www.digitale-schule-bayern.de/dsdaten/207/89.pdf</a>          einige Übungsaufgaben mit Lösung:  <a href="http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/binvert.htm">http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/binvert.htm</a>          Brinkmann: <a href="http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_11.htm">http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_11.htm</a>  <u>Aufgaben</u>: Stochastik-Studio-Aufgabensammlung-Binomialverteilung-Aufgaben und Lösungen mit dem Stochastischen Rechner</p>
<p><u>Bernoulliketten</u></p>	<p><u>Bernoulliversuch</u>: Ein Zufallsversuch, bei denen nur zwei Ergebnisse möglich sind.          p: Trefferwahrscheinlichkeit (Erfolgswahrscheinlichkeit)  <u>Bernoullikette</u>: mehrstufiger Zufallsversuch aus immer denselben unabhängigen Bernoulliversuchen.          n: Anzahl der Stufen (der Versuche)          p: Erfolgswahrscheinlichkeit im Einzelversuch          q = 1-p: Misserfolgswahrscheinlichkeit</p>
<p><u>Binomialverteilung</u></p>	<p>Die Anzahl der Treffer (Erfolge) bei einer Bernoullikette ist eine Zufallsvariable. Die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung nennt man Binomialverteilung mit den Parametern n und p.          X: Anzahl der Erfolge</p>



	<p><u>Grundbedingungen</u>          Umsetzung in <u>Baumdiagramm</u>          Berechnung mit <u>Formel</u></p> <p>Wahrscheinlichkeit für genau k Erfolge:  <math>P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}</math> (Formel von Bernoulli)</p> <p>Es gibt mehrere Berechnungsmöglichkeiten:          Mit der <u>Formel</u> (geht bei beliebigen n, p und k, aber wird bei sehr vielen Einzelwerten aussichtslos)          mit kumulierter (=summierter) <u>Tabelle</u> (geht nur, wenn die entsprechende Tabelle zu n und p vorhanden)          mit <u>Taschenrechner</u> oder Programm (beim Casio muss man die Summenformel und darin die Formel von Bernoulli eingeben.)</p>
<p>Erwartungswert der Binomialverteilung  <math>E(X)</math>          (Achtung: im Allgemeinen lässt sich der Erwartungswert nicht so einfach berechnen)</p>	<p><u>Erwartungswert</u>: <math>\mu = E(X) = n \cdot p</math></p> <p>Der Erwartungswert ist ein bei häufiger Versuchsausführung zu erwartender Durchschnittswert. Er muss daher nicht ganzzahlig sein. Dort wo er auf der x-Achse abzulesen ist, befindet sich im Histogramm aber immer die höchste Balken.</p>
<p><u>Streuungsmaße</u>  <u>Varianz und Standardabweichung</u>  <math>\sigma^2 = V(X)</math>          (Achtung: im Allgemeinen lassen sich Varianz und Standardabweichung nicht so einfach berechnen)</p>	<p><u>Varianz</u>: <math>\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q</math></p> <p><u>Standardabweichung</u>: <math>\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot p \cdot q}</math></p> <p>Links: Erläuterung der Varianz der Binomialverteilung bei Roofls <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/VarianzBinomial.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/VarianzBinomial.pdf</a></p>
<p><u>Sigma-Regeln</u>:</p>	<p>Da sich die Binomialverteilungen für <math>n \cdot p \cdot q &gt; 9</math> brauchbar durch die Normalverteilung annähern lassen, kann diese zur Approximation benutzt werden.</p> <p>Das gilt insbesondere für Sigma-Umgebungen.</p> <p>Braun zu <u>Sigma-Umgebungen</u>: <a href="http://www.nb-braun.de/Mathematik/Beurteilende/Statistik/grundlagen/grund-sigmaumgebung.htm">www.nb-braun.de/Mathematik/Beurteilende/Statistik/grundlagen/grund-sigmaumgebung.htm</a></p> <p>Roofls zu <u>Sigma-Umgebungen (5 S.)</u>  <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/SigmaUmgebung.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/SigmaUmgebung.pdf</a></p>



	<p><u>Brinkmann zu Sigma-Umgebungen</u>  <a href="http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_15.htm">http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_15.htm</a></p>
<p><u>Testtheorie</u>          – Einseitiger Hypothesentest (oder <b>Signifikanztest</b>) (Qualitätskontrolle)</p>	<p><u>Grundlage:</u> Binomialverteilung          Nullhypothese <math>H_0: p \leq p_0</math>          Gegenhypothese <math>H_1: p &gt; p_0</math> oder          Die Ablehnung der Nullhypothese erfolgt, falls <math>X &gt; k</math> für eine festgesetzte Grenze <math>k</math>.</p> <p>Nullhypothese <math>H_0: p \geq p_0</math>          Gegenhypothese <math>H_1: p &lt; p_0</math>          Die Ablehnung der Nullhypothese erfolgt, falls <math>X \geq k</math> für eine festgesetzte Grenze <math>k</math>.</p> <p>Fehler 1. Art: Fälschliches Verwerfen von <math>H_0</math>: Dieser Fehler lässt sich immer berechnen. Seine Wahrscheinlichkeit soll kontrolliert werden (<math>&lt; \text{Signifikanzniveau } \alpha</math>).</p> <p><u>1. Fall:</u> <math>k</math> ist bekannt (festgesetzt), Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art soll berechnet werden:          Ansatz: Setze <math>p = p_0</math> und berechne <math>P(X = k)</math>.</p> <p><u>2. Fall:</u> <math>p</math> ist bekannt (festgesetzt), <math>\alpha</math> ist vorgegeben. Ablehnungsbereich <math>A</math> soll bestimmt werden.          linksseitiger Test: <math>A = \{0; \dots; k\}</math>          rechtsseitiger Test: <math>A = \{k; \dots; n\}</math></p> <p>Ansatz:  <u>1. Möglichkeit:</u> Wenn <math>\sigma &gt; 3</math> erfüllt ist, kann die Sigma-Umgebung verwendet werden. (<u>Sigma-Regeln</u>: aus der Tabelle ist der Vorfaktor von <math>\sigma</math> zu entnehmen. Beachte, ob die Tabelle für ein- oder zweiseitige Tests gemacht ist.)  <math>P(X = k)</math>.</p> <p><u>2. Möglichkeit:</u> Wenn die (kumulierte) Tabelle für <math>n</math> und <math>p</math> vorliegt: Tabellenarbeit:          Linksseitiger Test: Aus der entsprechenden Tabellenspalte das größte <math>k</math> entnehmen, so dass <math>P(X &lt; k) &lt; \alpha</math></p> <p><u>3. Möglichkeit:</u> ohne Tabelle aber mit Computer/TR: systematisches Probieren.</p> <p><u>Links:</u>          Hervorragende Einführungsseite im internet:  <a href="http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_16.htm">http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_16.htm</a></p>



	<p>           knappe Einführung von Rooftools zur Benutzung der Sigma-Umgebung bei Hypothesentests (2 S als pdf, Kombination aus Einführung und Aufgaben mit Lösungen) <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/TestenHypothesen.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/TestenHypothesen.pdf</a> </p> <p>           Zusammenfassung, Ergänzungen zum Fehler 1. Und 2. Art und Übungen (6S.)  <a href="http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/TestenHypothesen2.pdf">http://nibis.ni.schule.de/~lbs-gym/Stochastikpdf/TestenHypothesen2.pdf</a> </p> <p>           Aufgaben <a href="#">methods</a> Linksseitiger Test            Aufgaben <a href="#">methods</a> Rechtsseitiger Test         </p> <p>           Selbstlernmaterialien: <a href="http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/wk/ht/htindex.html">http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/wk/ht/htindex.html</a>  <u>Links:</u> Sehr ausführliches Leitprogramm, das die gesamte Wahrscheinlichkeitsrechnung anhand des Problems des Testens aufzieht:  <a href="#">HypothesenTest Keiser ETHZH.pdf</a> </p> <p>           interaktive Lernumgebung:  <a href="http://www.matheprisma.de/Module/Hypoth/index.htm">http://www.matheprisma.de/Module/Hypoth/index.htm</a> </p> <p>           Brinkmann: <a href="http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/p9_hctest_01.htm">http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/p9_hctest_01.htm</a> und  <a href="http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_16.htm">http://www.brinkmann-du.de/mathe/gost/stoch_01_16.htm</a> </p> <p> <u>Literatur:</u> im Buch (LS): S.381ff.         </p> <p>           Zu Konfidenzintervallen (ein <u>anderer</u> Teil der schließenden Statistik: <a href="http://www.mint-hamburg.de/Handreichungen/Ma-gyO/">http://www.mint-hamburg.de/Handreichungen/Ma-gyO/</a> → Grundkurs G3 (Der Zufall steht Modell: Lehrerheft, Lernheft und Aufgaben)         </p>
<p> <b><u>Üben und Wiederholen</u></b>  <b><u>(übergreifend zur Stochastik)</u></b> </p>	<p> <u>Links:</u>            Selbstlernmaterialien: <a href="http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/wk/aa/aaindex.html">http://ne.lo-net2.de/selbstlernmaterial/m/wk/aa/aaindex.html</a>            zur Stochastik <a href="http://www.math.uni-paderborn.de/~agbiehler/sis/sisonline/struktur/jahrgan_g20-2000/heft1/2000-1_Strick.pdf">http://www.math.uni-paderborn.de/~agbiehler/sis/sisonline/struktur/jahrgan_g20-2000/heft1/2000-1_Strick.pdf</a> </p> <p> <u>Aufgaben:</u> Stochastik-Studio-Aufgabensammlung (Quelle: Siehe oben) Binomialverteilung-Aufgaben und Lösungen mit dem Programm Hypothesentest-Standardaufgaben-Einfacher Signifikanztest (einseitig) und außerdem: -Abituraufgaben (sechs         </p>



	verschiedene)
--	---------------

