Glossar: Vorzeichenwechselkriterium für Extremstellen

Vorzeichenwechselkriterium [Analysis, Differentialrechnung]

An einer Vorzeichen-Tabelle von f' kann man ablesen, in welchen Bereichen f steigt bzw. fällt.
Damit weiß man auch, wo Minimalstellen, Maximalstellen (und evtl. Sattelstellen) vorliegen.

Bsp 1: $f(x) = x^2 + 6x - 4$ soll händisch auf Extrema untersucht werden:
$f'(x) = 2\,x + 6$
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow 2\,x + 6 = 0$ | - 6
$\Leftrightarrow 2\,x = -6$ | : 2
$\Leftrightarrow x =$ -3

x	$x < -3$	$-3 < x$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗

Also hat f bei $x = -3$ eine lokale Minimalstelle.

Bsp 2: $f'(x) = \frac{1}{2}\,(x+2)\,(x-3)\,(x-5)$. Diesmal ist also die Ableitung schon angegeben und liegt netterweise in faktorisierter Form vor, so dass man ihre Nullstellen (die möglichen Extremstellen von f) sofort erkennt:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x =$ -2 oder $x =$ 3 oder $x =$ 5.
All dies sind einfache Nullstellen von f', also liegt ein Vorzeichenwechsel vor.
Im Feld ganz rechts muss „+“ stehen, da der Leitkoeffizient von f' positiv ist und deswegen gilt: $\lim_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.

x	$x < -2$	$-2 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗

Also: lok.Min. lok.Max. lok.Min.

Bsp 3: $f(x) = -x^3(x-4) = -x^4 + 4x^3$
$f'(x) = -4x^3 + 12x^2$
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow -4x^3 + 12x^2 = 0$ | :(-4)
$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = 0$ | x^2 ausklammern
$\Leftrightarrow x^2(x-3) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow x = 0$ (doppelt) $\vee$ $x = 3$

x	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	↗	↘	↘

Also: lok.Max. Sattelst.

Nun meinst man leicht, das sei alles überflüssig, schließlich hat man oft genug die hinreichende Bedingung geübt.
Bei einigen Funktionen kann aber die Berechnung der zweiten Ableitung sehr anstrengend werden:

Bsp 4: $f(x) = (2x-4) \cdot e^{-x}$ soll händisch auf Extrema untersucht werden:
$f'(x) = 2\,e^{-x} + (2x-4)e^{-x} \cdot (-1) = 2\,e^{-x} + (-2x+4)e^{-x}$
$= (-2\mathrm{x} + 6) \cdot e^{-x}$
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow (-2\mathrm{x} + 6) \cdot e^{-x} = 0$ $\;|> 0$
$\Leftrightarrow -2x + 6 = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$
Nun ist das VZW-Kriterium einfacher als die 2. Ableitung:
$-2x + 6$ ist bis zur Stelle $x = 3$ positiv, dann negativ,
also muss dasselbe für $f'(x)$ gelten:

x	$x < 3$	$3 < x$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	↗	↘

Damit muss $x = 3$ eine lokale Maximalstelle sein.