Glossar: Umkehrfunktion

Umkehrfunktion von f [Analysis]

Diejenige Funktion h, für die gilt: $h(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$.

Bezeichnung: $\bar{f}$ (häufig auch: f^{-1}).

Eigenschaft: Führt man also f und f^{-1} hintereinander aus, so erhält man die identische Funktion id mit $id(x) = x$.
Einfacher gesagt: Setzt man eine irgend eine Zahl in die Funktion f ein und das Ergebnis davon in die Umkehrfunktion von f, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Bem.: Man erhält die Umkehrfunktion, indem man x und y vertauscht, also $f(x)$ durch x ersetzt und x durch $f^{-1}(x)$:

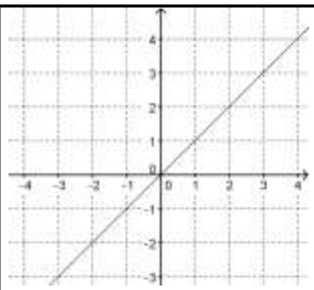
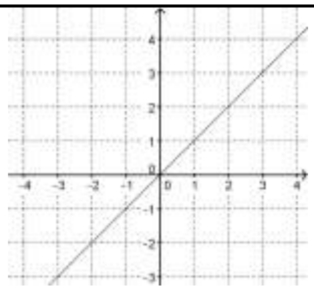
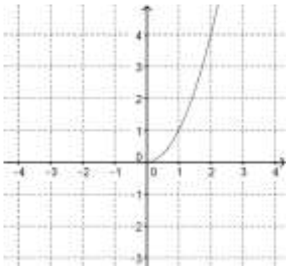
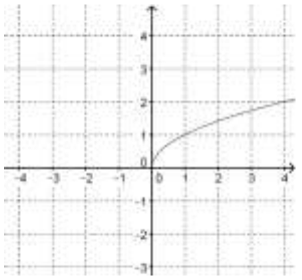
Beispiel 1: $f(x) = 2x + 3$, dann ist
$x = 2 \cdot \bar{f}(x) + 2x + 3 \mid -3$
$\Leftrightarrow 2 \cdot \bar{f}(x) = x - 3 \mid : 2$
$\Leftrightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.
Setzt man nun eine beliebige Zahl in f ein und das Ergebnis dann in $\bar{f}$, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl.

Graphisch: Der Graph der Umkehrfunktion ist gegenüber dem der ursprünglichen Funktion an der ersten Winkelhalbierenden gespiegelt, denn: Der Vertauschung von x und y in der Rechnung (s.o.) entspricht graphisch die Vertauschung von x- und y-Achse. Das aber ist die genannte Spiegelung.

Bem.: Nicht jede Funktion hat eine Umkehrfunktion.

Beispiel 2: Für f mit $f(x) = x^2$ gilt: $f(3) = 9$, aber auch $f(-3) = 9$, daher ist Sie nicht umkehrbar.
elementare Umkehrfunktionen:

$f(x)$	$\bar{f}(x)$
x	x

	
$a \cdot x$	$\frac{1}{a}\,x$
$x + c$	$x - c$
x^2 für $x \geq 0$ 	$\sqrt{x}$ 
x^n für eine gerade Zahl n und $x \geq 0$	$\sqrt[n]{x}$
x^n für eine ungerade Zahl n	$\sqrt[n]{x}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$
sin (x)	arcsin (x)
cos (x)	arcos (x)
tan (x)	arctan (x)

Bem.: Die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion ist wieder die ursprüngliche Funktion. Der obigen Tabelle entnimmt man damit z.B., dass die Umkehrfunktion von ln die natürliche e-Funktion ist (mit dem Term e^x).

Links: http://delphi.zsg-rottenburg.de/analysis.html.