Glossar: Steckbriefaufgaben bei quadratischen Funktionen

Steckbriefaufgabe [Analysis]

Aufgabe, bei der die bestimmte Eigenschaften einer Funktion (z.B. einer quadratischen Funktion) vorgegeben sind und nun die Gleichung der Funktion aufgestellt werden soll.

Bei der Lösung geht es zum einen darum, ein entsprechendes Lineares Gleichungssystem aufzustellen,
und zum zweiten darum, dieses Lineare Gleichungssystem zu lösen.
Zur Lösung des Linearen Gleichungssystems greift man meist auf das Additionsverfahren/Gauß-Verfahren zurück. Das ist aber insbesondere bei vielen Variablen rechenaufwändig und fehleranfällig. So nimmt man gerne auch die Hilfe eines geeigneten Taschenrechners oder CAS in Anspruch.

Vorgehensweise:

1. allg. Form: also $f(x) = a x^2 + b x + c$ (wenn es um eine quadratische Funktion geht)

2. Angaben aus dem Text auswerten und Gleichungen aufstellen.
Wenn z.B. der Graph von f durch (2 | 5) geht, bedeutet das: $f(2) = 5$.
Einsetzen in die allg. Form ergibt Gleichungen bezüglich der Koeffizienten (a, b, c):

$a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 5$
$\Leftrightarrow 4a + 2b + c = 5$
Für eine eindeutige Lösung benötigt man in der Regel drei Gleichungen, da auch drei Variablen (oder Parameter) zu bestimmen sind.

3. Lösung des Linearen Gleichungssystems mit Additionsverfahren (oder Gauß-Verfahren oder dem Taschenrechner bzw. CAS)

4. Angeben der entsprechenden Funktionsgleichung.

Schritt-für-Schritt-Anleitung zu Steckbriefaufgaben bei quadratischen Funktionen: hier

Sehr wichtig ist, dass man die Gleichungen richtig aufstellen kann.
Wie das geht, kann man folgender Tabelle entnehmen. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass eine quadratische Funktion f gesucht ist, also
$a x^2 + b x + c$

Formulierung in der Aufgabenstellung	**Gleichung**	**Gleichung bzgl. der Koeffizienten**
„f nimmt an der Stelle x_0 den Wert y_0 an“	$f(x_0) = y_0$	$a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c = y_0$

oder: „Der Graph von f geht durch den Punkt P $(x_0 \vert y_0)$.“		
„x_0 ist eine Nullstelle von f“ oder: „Der Graph von f schneidet die x-Achse an der Stelle x_0.“	$f(x_0) = 0$	$a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c = 0$

Bem 1: Bei linearen Funktionen stellt sich das entsprechende Problem etwas anders dar: Siehe **Geradengleichungen** aufstellen.

Bem 2: Ist unter den angegebenen Punkten auch derjenige mit der x-Koordinate Null, so ist dies ein kleines Geschenk: Man kennt nun den y-Achsenabschnitt und hat einen Koeffizienten weniger zu berechnen.

Interaktives Training (zufallsgenerierte Aufgaben mit Visualisierung und Lösungshilfen): hier

Check Gleichungen aufstellen für Steckbriefaufgaben bei quadratischen Funktionen ohne Differentialrechnung: hier

Check Gleichungen aufstellen für ökonomische Steckbriefaufgaben bei quadratischen Funktionen ohne Differentialrechnung: hier

Check Steckbriefaufgaben bei quadratischen Funktionen ohne Differentialrechnung: hier

Schritt für Schritt Trainingsaufgabe für einfache quadratische ökonomische Steckbriefaufgaben (c gegeben): hier

Schritt für Schritt Trainingsaufgabe für nicht so einfache quadratische ökonomische Steckbriefaufgaben (c nicht gegeben): hier

In vielen Steckbriefaufgaben wird Differentialrechnung benutzt:

Häufig kommen Angaben über lokale Extrempunkte oder Wendepunkte vor. Dann muss die jeweilige Ableitung gebildet und die entsprechende notwendige Bedingung verwendet werden.

Wiederum besteht ein Hauptteil der Aufgabe darin, die Gleichungen aufzustellen. Folgende Tabelle soll dabei helfen. Dabei soll vorausgesetzt werden, dass eine quadratische Funktion f gesucht ist, also

$f(x)$= a x ^{2} + b x + c

$f'(x)$ = 2a x + 2

Formulierung in der Aufgabenstellung	**Gleichung**	**Gleichung bzgl. der Koeffizienten**
f hat an der Stelle x_0 die Steigung m_0 .	$f'(x_0) = m_0$	$2a \cdot x_0 + b = m_0$
x_0 ist eine lokale Extremstelle (Minimalstelle, Maximalstelle) von f	$f'(x_0) = 0$ (notw. Bed. für lok. Extremstellen)	$2a \cdot x_0 + b = 0$

oder Bei x_0 hat f eine waagerechte Tangente).		
E (x_0 | y_0) ist ein lokaler Extrempunkt (Hochpunkt, Tiefpunkt) von f.	$f'(x_0) = 0$ ∧ $f'(x_0) = y_0$	$2a \cdot x_0 + b = 0$ ∧ $x_0^2 \cdot a + x_0 \cdot b + c = y_0$ (siehe oben)

Ohne rechentechnische Hilfsmittel (geeigneter Taschenrechner oder CAS) ist die Lösung des entsprechenden Linearen Gleichungssystems sehr aufwändig.

Wer es genau nimmt (und dazu neigen Mathematikerinnen und Mathematiker) muss nach Verwendung einer notwendigen Bedingung z.B. für eine lokale Maximalstelle auch noch überprüfen, ob wirklich eine lokale Maximalstelle vorliegt! (z.B. mit der hinreichenden Bedingung.)

Übersicht: uebersicht_oekonom_anwendungen_steckbrief_mit_diffrech.pdf

Interaktives Training (zufallsgenerierte Aufgaben mit Visualisierung und Lösungshilfen): hier

Checks:

Check Steckbrief quadratischer Funktionen: hier

Check Steckbrief quadratischer Funktionen (Gleichungen aufstellen): hier

Check Steckbrief quadratischer Funktionen mit Diff.rechnung (Gleichungen aufstellen): hier

Check Steckbrief quadratischer Funktionen bei ökonomischen Anwendungen (Gleichungen aufstellen): hier

Check Steckbrief kubischer Funktionen: hier

Aufgaben:
ab_ganzrationale_funktionen_steckbrief,
ab_oekonom_funktionen_steckbrief.

Links: Übungsaufgaben quadratische Funktion, deren Graph durch drei vorgegebene Punkte geht: http://www.math-help.de/mathe/gost/pdf/ab_quad_fkt_p_d_3_p_01.pdf.