

Glossar: Skalarprodukt

Skalarprodukt zweier [Vektoren](#) [Lineare Algebra / [Vektorrechnung](#)]

Das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren ist folgendermaßen definiert

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3.$$

Bei zweidimensionalen Vektoren entsprechend:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$

$$= 2 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 + 0,5 \cdot (-10) = 2 + 0 - 5 = \underline{\underline{-3}}.$$

weitere Beispielrechnung: [hier](#)

Bem.: Für zwei beliebige Vektoren \vec{a} und \vec{b} , die miteinander den Winkel α einschließen, gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha).$$

Auch dies ist eine gleichberechtigte Möglichkeit, das Skalarprodukt zu definieren.

Anschaulich: In diesem Fall ist $\vec{v} \cdot \vec{w}$ die Länge der Projektion von \vec{v} auf \vec{w} multipliziert mit der Länge von \vec{w} .

Zusammenhang mit **Orthogonalität** - also dem Senkrechtstehen zweier Vektoren zueinander:

Da der Cosinus von 90° Null ist, können die beteiligten Vektoren so lang sein wie sie wollen, ihr Skalarprodukt wird immer Null sein. Man nennt solche Vektoren orthogonal, als Zeichen verwendet man „ \perp “. Somit gilt:

$$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0.$$



Berechnung mit dem Taschenrechner oder CAS

Die Befehle heißen dotP oder dotProdukt

innermathematische Anwendungen:

Das Skalarprodukt ist ein nützliches Hilfsmittel bei der Berechnung von Winkeln und Abständen. Es kann auch benutzt werden, um Geradengleichung in der Ebene oder Ebenengleichungen im Raum aufzustellen.

automatische Berechnung auf interaktiver website: [arndt-bruenner](http://arndt-bruenner.de)

Winkelberechnung: Wenn wir uns für den Winkel interessieren, den zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} miteinander einschließen, sollten wir uns nach einer Gleichung umsehen, in der dieser Winkel in irgendeiner Form vorkommt.

Zum Glück kennen wir so eine: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

Daraus ergibt sich sofort: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Um nun α zu ermitteln, benötigen wir die Umkehrfunktion des Cosinus - sie heißt Arcuscossinus (arccos oder auf vielen Taschenrechnern \cos^{-1})

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right)$$

Beispiel: Gesucht ist der Winkel α

zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 6 + (-5) \cdot 2 = 50.$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40};$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{50}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{40}} \approx 0,70710678$$

$$\alpha = \cos^{-1}(0,70710678) = 45^\circ.$$

automatische Berechnung auf interaktiver website: [arndt-bruenner](http://arndt-bruenner.de)

physikalische Anwendungen:

Arbeit ist Kraft mal Weg, wenn aber die Kraft nicht genau in Richtung des Weges wirkt muss dabei auch der Winkel zwischen beiden berücksichtigt werden:

$$W = F \cdot s \cdot \cos(\alpha)$$

oder als Vektoren ausgedrückt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos(\alpha)$$



Links: Gute Einführung anhand physikalischer Beispiele:
<http://www.kilchb.de/skalarpr.html#physik>

