# Glossar: Polstelle

**Polstelle –eine besondere Definitionslücke** [Analysis, insbes. gebrochen-rationale Funktionen]

Da das Teilen durch null nicht definiert ist, sind gebrochen-rationale Funktionen an den Stellen nicht definiert, an denen ihre Nennerfunktion null wird.
Die **Nullstellen der Nennerfunktion** sind man daher Definitionslücken.
Sie sind entweder hebbare Lücken, wenn sich die Funktion dort stetig fortsetzen lässt oder Polstellen (mit oder ohne Vorzeichenwechsel).
Eine hebbare Lücke erkennt man daran, dass sich der entsprechende Linearfaktor herauskürzen lässt.

**Ansatz**: Gegeben ist $f$ mit $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$, dann berechnet man die Definitionslücken mit $n(x)$=0.

**Beispiel 1:** $f(x)=\frac{x+3}{x-4}$. Bestimmung der Definitionslücken:
$x - 4 = 0$ | + 4
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{4}}$. Die einzige Definitionslücke liegt bei $x = 4$
(Sie gehört zum Linearfaktor $(x-4)$).
$D_{max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ 4 \}$.
Da 4 in diesem Fall Nullstelle des Nenners ist, aber nicht Nullstelle des Zählers, ist x = 4 eine Polstelle und zugleich eine senkrechte Asymptote.

**Beispiel 2:** $f(x)=\frac{x+3}{x^2-x-12}$. Bestimmung der Definitionslücken:
$x^2 - x - 12 = 0$ | + 12
$\Leftrightarrow x^2 - x = 12$ | quadr. Ergänzung: $+\left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 12{,}25$ | + 4
$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 12{,}25$
$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 3{,}5 \vee x - \frac{1}{2} = -3{,}5$ | $+\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$
Die Definitionslücken sind also -3 und 4.
$D_{max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ -3; 4 \}$.
Wir können den Nenner in der faktorisierten Form schreiben:
$x^2 - x - 12 = (x + 3)(x - 4)$, also: $f(x) = \frac{x+3}{(x+3)(x-4)}$.
Den Linearfaktor x+3 kann man kürzen, also ist $x = -3$ eine hebbare Lücke.
Der Faktor $x - 4$ bleibt im Nenner erhalten, also liegt bei $x = 4$

eine Polstelle vor.
$x = 4$ ist zugleich eine senkrechte Asymptote.

Links: http://www.raschweb.de/Q11-m-Polstellen.pdf