Glossar: orthogonal

orthogonal / Orthogonalität zweier Geraden oder Vektoren [Analysis, Lineare Algebra; Vektorrechnung]

senkrecht zueinander stehend, also in einem Winkel von 90°.

Analysis:
Untersuchung auf Orthogonalität bei zwei Geraden:
Man schaut sich die beiden Steigungen an: Ist die eine der neative Kehrwert der anderen, so stehen die beiden Geraden senkrecht zueinander - also orthogonal.
Siehe: orthogonale Geraden.

Vektorrechnung:
Untersuchung auf Orthogonalität: Man bildet das Skalarprodukt der Vektoren. Wenn Null herauskommt, sind die beiden orthogonal.

Beispiel 1: Sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$ orthogonal?

Lösung: $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2{,}5 + 5 \cdot (-1) = 0$, also sind sie orthogonal.

Beispiel 2: Prüfen Sie, ob $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal sind.

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 4-6+3 = 1 \neq 0$, also sind sie nicht orthogonal.

Finden eines orthogonalen Vektors in der Ebene:
Man vertauscht beide Koordinaten des Vektors und ändert eines der Vorzeichen.

Beispiel 3: Gesucht ist ein orthogonaler Vektor zu $\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \end{pmatrix}$: Man wählt z.B. $\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Finden eines orthogonalen Vektors im Raum: Man wählt zwei Koordinaten frei aus. Da das Skalarprodukt Null sein muss, erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, um die fehlende Koordinate zu berechnen.

Beispiel 4: Gesucht ist ein orthogonaler Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, der orthogonal zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist: Man wählt z.B. $x_1 = 1$ und $x_2 = 0$.

Es muss gelten: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$, also $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot x_3 = 0$
$\Leftrightarrow 1 + 3 \cdot x_3 = 0 \mid -1$
$\Leftrightarrow 3 \cdot x_3 = -1 \mid :3$
$\Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{3}$

Ein orthogonaler Vektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Finden eines orthogonalen Vektors zu zwei Vektoren - Normalenvektor: Man berechnet das Vektorprodukt der beiden Vektoren.

Anwendungen: Normalenvektoren, Normalform, HNF (Hessesche Normalenform)

Siehe: Skalarprodukt, orthogonale Geraden