LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: inverse Matrix

Matrix, inverse [Lineare Algebra, Matrizenrechnung]

Gegeben ist eine quadratische Matrix A. Dann heißt A^{-1} die zu A inverse Matrix oder kurz: die Inverse von A, wenn

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A =$ E_n (also die Einheitsmatrix)

Das bedeutet: Die Überprüfung, ob man eine Inverse gefunden hat, ist ganz leicht:

Bsp. 1: Gegeben ist die Matrix A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

Behauptung:

B = $\begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix}$ ist die Inverse von A.

Überprüfung: A · B = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0{,}5 \\ 0{,}6 & -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Das stimmt, also ist B = A^{-1}.

Bem.: Sehr aufmerksamen Leserinnen und Lesern ist vielleicht aufgefallen, dass im Beispiel nur überprüft wurde, dass A · B = E_n. ist, aber nicht, dass auch B · A = E_n.

Praktischerweise ist diese Überprüfung nicht nötig:

Wenn die Gleichung A · B = E_n. erfüllt ist, gilt automatisch auch B · A = E_n (obwohl die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen nicht kommutativ ist).

Aufwändiger ist die Bestimmung einer Inversen (ohne CAS oder entsprechendes Gerät):

Dazu muss also die Matrizengleichung A · X = E_n nach X aufgelöst werden.

Man schreibt die Matrizen A und E_n nebeneinander und geht dann vor wie bei der Lösung eines Linearen Gleichungssystems mittels des Gauß-Verfahrens

Beispielrechnung Invertieren einer 2×2-Matrix: hier

Da dieses nicht immer lösbar ist, gibt es nicht immer eine Inverse. Matrizen, die eine Inverse haben, heißen invertierbar (eine andere Bezeichnung ist „regulär").

Ein CAS wie der TI-NSpire CX CAS invertiert die Matrix A durch Eingabe von A^{-1}.

Taschenrechner wie der TI30XPRO(MV) können die Inverse von 2x2- und von 3x3-Matrizen direkt berechnen (wenn die Matrizen invertierbar sind): Man gibt die Matrix ein (matrix, EDIT, [A], …) und ruft sie dann wieder auf (matrix, 1: [A]) und fügt mit der $\boxed{x^{\square}}$–Taste den Exponenten -1 ein. Mit $\boxed{\text{enter}}$ erhält man die Inverse.

Kannst du´s?
Mit Gauß-Jordan-Verfahren eine Matrix invertieren?
Mit dem Taschenrechner eine Matrix invertieren?
Ohne Taschenrechner überprüfen, ob die Matrix B die Inverse zu A ist? Check

Bem. 1: $E_n^{-1} = E_n$, d.h., die Einheitsmatrix ist zu sich selbst invers.

Bem. 2: $(A^{-1})^{-1} = A$, d.h., die Inverse der Inversen ist wieder die ursprünglich Matrix.

Bem. 3: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ d.h., beim Invertieren eines Produkts vertauscht sich die Reihenfolge der Faktoren.

innermathematische Anwendungen:
Hat man die Inverse einer Matrix einmal bestimmt, kann man Matrizenmultiplikationen rückgängig machen, wozu man sonst mit viel Arbeit jeweils Lineare Gleichungssysteme lösen muss. D.h. man hat eine Art „Generalschlüssel" zur Lösung von LGS, die auf der entsprechenden Matrix beruhen:
Um den Vektor $\vec{x}$ so zu bestimmen, dass die Gleichung
$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ erfüllt ist, muss man nur noch multiplizieren:
$A^{-1} \cdot \vec{y} = \vec{x}$.
Schon die Information, ob diese Inverse zu A existiert, ist bedeutsam, denn dann ist jede Gleichung der Form
$A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ eindeutig lösbar.
Im Leontief-Modell (ökonomische Verflechtungen) spielt die Leontief-Inverse $(A-E)^{-1}$ eine wichtige Rolle.