Glossar: Linearkombination

Linearkombination [Lineare Algebra; Analytische Geometrie, Vektorrechnung]

Vielfachensumme mehrerer Vektoren.
Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ und die reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$.
Dann heißt der Vektor $\vec{w} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + a_n \cdot \vec{v}_n$ Linearkombination von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.

Beispiel 1:
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$,

dann ist z.B. $\vec{w} = 3 \cdot \vec{v}_1 + 5 \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \\ 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

Bemerkung: Ein Vektor lässt sich als Linearkombination *eines* anderen Vektors darstellen, genau dann, wenn er Vielfaches dieses Vektors ist (mit anderen Worten: wenn beide kollinear sind oder in anderen Worten: wenn sie linear abhängig sind).

Beispiel 2:
$\begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination von $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ darstellen,

nämlich: $\begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Beispiel 3:
Gegeben sind die Vektoren

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Dann ist $3 \cdot \vec{v} + 5 \cdot \vec{w}$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-11) \\ 3 \cdot 10 + 5 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -40 \\ 70 \end{pmatrix}$$

eine Linearkombination von $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

Bemerkung: Lässt sich ein Vektor lässt sich als

Linearkombination *zweier* anderer Vektoren darstellen, so heißen die drei Vektoren komplanar.

Anwendungen

Der Begriff Linearkombination hängt eng mit den Begriffen lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit zusammen.
Bei Linearen Gleichungssystemen in Matrizenform ist die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren entscheidend für die Lösbarkeit.
Bei quadratischen Matrizen ist die lineare Unabhängigkeit der Zeilenvektoren (gleichbedeutend mit der Spaltenvektoren) der Rang der Matrix. Eine quadratische Matrix ist genau invertierbar, wenn sie den vollen Rang hat.