LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: Lineares Gleichungssystem (LGS)

Gleichungssystem, lineares [Grundlagen, Lineare Algebra, Matrizenrechnung]

Mehrere lineare Gleichungen (mit mehreren Variablen), die alle zu erfüllen sind, bilden ein lineares Gleichungssystem.

Abkürzung: LGS.

Beispiel 1: Ein lineares Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten ist z.B.:
-4 x + 10 y = -2
∧ 3 x – 2 y = -4

Schreibweise: Es gibt einen Haufen Schreibweisen hierzu. Eigentlich geht es im Wesentlichen darum, eine Übersicht darüber herzustellen, welche Gleichungen zusammengehören und welche Rechenschritte durchgeführt werden.

Schreibweise mit „und"-Verknüpfung:
-4 x + 10 y = -2 (I)
∧ 3 x – 2 y = -4 (II)
Dabei sind die Gleichungen (häufig) mit römischen Zahlen durchnummeriert, um genau angeben zu können, was man rechnet (z.B. (I)+(II)) oder in welche Gleichung man einsetzt.

Zusammenfassung durch senkrechte Striche:
$$\left| \begin{array}{c} -4\,x + 10\,y = -2 \\ 3\,x - 2\,y = -4 \end{array} \right|$$

Matrizenschreibweise:
$$\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Schreibweise als erweiterte Koeffizientenmatrix:
$$\begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Man unterscheidet homogene und inhomogene LGS.
Bei homogenen LGS stehen auf der rechten Seite der Gleichungen nur Nullen, wie z.B. bei
-4 x + 10 y = 0
∧ 3 x – 2 y = 0

bzw. $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Bei inhomogenen LGS tritt dort wenigstens eine Zahl ungleich Null auf, z.B.:

$-4x + 10y = 0$
$\wedge\ 3x - 2y = -4$

bzw. $\begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Lösungsverfahren: Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Gaußverfahren.

Beispiel 1: (gelöst mit Additionsverfahren)

	$-4x + 10y$	$= -2$	(I)
$\wedge$	$3x - 2y$	$= -4$	(II)
$\Leftrightarrow$	$-4x + 10y$	$= -2$	(I)
(5·II) $\wedge$	$\underline{15x - 10y}$	$\underline{= -20}$	$\underline{\text{(III)}}$
(I)+(III)	$11x$	$= -22 \mid :11$	
$\Leftrightarrow$	x	$= \underline{\underline{-2}}$	

Einsetzen in (II) ergibt:

	$-6 - 2y$	$= -4 \mid +6$
$\Leftrightarrow$	$-2y$	$= 2 \mid :(-2)$
$\Leftrightarrow$	y	$= \underline{\underline{-1}}$. (eindeutig lösbar).

Man kann diese Lösung auch mit Hilfe von Matrizen aufschreiben. Man spricht dann von einer erweiterten Koeffizientenmatrix. Dieses LGS löst man mit dem Gauß-Verfahren. Das entspricht genau dem Additionsverfahren in Matrizenschreibweise. In der Regel benutzt man zunächst das Matrixelement links oben, um alle Elemente, die in der selben Spalte darunter stehen, zu Null zu machen. Danach verwendet man das erste Element in der zweiten Zeile, das ungleich Null ist usw.

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array}$ N.R.: 10· 3+(-2)· 4=22; (-2)· 3+(-4)· 4=-22;

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & -2 \\ 0 & 22 & -22 \end{array}\right)$

22 y=-22 $\Leftrightarrow$ y=$\underline{\underline{-1}}$

Einsetzen in erste Zeile:

$-4x + 10 \cdot (-1) = -2 \ \Leftrightarrow -4x - 10 = -2 \Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$

Beim **Gauss-Jordan-Verfahren** zur Lösung von LGS geht es darum, die erweiterte Koeffizientenmatrix mit Hilfe von Gauss-Umformungen so umzuformen, dass auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. rechts steht dann die Lösung (der Lösungsvektor)

$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array}$ N.R.: 10· 3+(-2)· 4=22; (-2)· 3+(-4)· 4=-22;

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & -2 \\ 0 & 22 & -22 \end{array}\right) \quad :22$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \cdot (-10)$$ N.R.: -1· (-10)+(-2) =8

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad :(-4)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ Nun steht rechts die Lösung.

weiteres Beispiel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right) \text{ Lösungsvektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Denn die erste Zeile bedeutet ja z.B., dass 1x+0y+0z=3 (also x=3)
und entsprechend folgt y=-4 und z=0,5

Lösbarkeit

Lineare Gleichungssysteme mit gleich vielen Gleichungen und Variablen können eindeutig lösbar, unlösbar oder mehrdeutig lösbar sein. Wenn man die entsprechende Matrix auf obere Dreiecksform gebracht hat, betrachtet man die Elemente der Hauptdiagonale.
Sind diese alle ungleich Null, so ist das LGS eindeutig lösbar.
Bsp.:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \text{ ist eindeutig lösbar.}$$

Entsteht eine Nullzeile in der Koeffizentenmatrix (links vom Strich), während rechts in der selben Zeile eine Zahl ungleich Null steht, so ist das LGS unlösbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right) \text{ ist unlösbar,}$$

denn die untere Zeile bedeutet: 0 ·z=-4 (Widerspruch)
Entsteht eine Nullzeile in der erweiterten Koeffizentenmatrix (links vom Strich und auch rechts davon), so ist das LGS mehrdeutig lösbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ ist mehrdeutig lösbar,}$$

denn die untere Zeile bedeutet: 0 ·z=0 (Das ist eh klar.)
z ist demnach beliebig.
Weitere Lösung:

-4y-2z=8 ⇔-4y=2z+8 ⇔ $y = -\frac{1}{2}\mathrm{z}-2$

2x+3·($-\frac{1}{2}$z-2)-1z=1 ⇔ $2\mathrm{x} - \frac{3}{2}\mathrm{z} - 6 - \mathrm{z} = 1$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{x} = \frac{5}{2}\mathrm{z} + 7 \Leftrightarrow \mathrm{x} = \frac{5}{4}\mathrm{z} + \frac{7}{2}$

LORE LORENTZ SCHULE

Lösung: $\vec{x}=\begin{pmatrix} \frac{5}{4}z+\frac{7}{2} \\ -\frac{1}{2}z-2 \\ z \end{pmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$

Lösung mit Hilfe des Taschenrechners/CAS:
moderne Taschenrechner wie der TI30XPro verfügen über Funktionen wie sys-solv, mit denen Gleichungssysteme mit zwei oder drei Unbekannten automatisch gelöst werden können.
Beim TI-Nspire kann man z.B. die erweiterte Koeffizientenmatrix eingeben und mit rref lösen. Die ungeformte Matrix besteht links aus der Einheitsmatrix und zeigt rechts den Lösungsvektor.
Das ist nur eine von mehreren Möglichkeiten. Mehr dazu: hier)

Anwendungen: Steckbriefaufgaben (Aufstellen von Funktionsgleichungen ganzrationaler Funktionen nach vorgegebenen Eigenschaften),
Schnittpunkte von Geraden miteinander oder von Geraden und Ebenen oder Ebenen mit Ebenen in der Lineare Algebra (Untersuchung auf Lagebeziehungen),
Bestimmung von Normalenvektoren zu zwei vorgegeben Vektoren.
Auch die Berechnung der inversen Matrix beruht darauf (Bedeutung für viele Zusammenhänge – Lösung von Matrizengleichungen, Eigenwertproblem)
Ein technische Anwendung: früher benutzte man LGS für die Computertomographie.

ökonomische Anwendungen: Bei mehrstufigen Produktionsprozessen Berechnung, wie viele ME der Endprodukte aus vorgegebenen Mengen der Rohstoffe berechnet werden können.
Verflechtungen nach dem Leontief-Modell (Leontief-Inverse)
Lineare Optimierung (Simplex-Verfahren)

Checklist zum Thema Lineare Gleichungssysteme: hier

Check zum Thema Lineare Gleichungssysteme und erweiterte Koeffizientenmatrix: hier

Check zum Thema Lineare Gleichungssysteme in Matrizenschreibweise: hier

Training Cornelsen