

## Glossar: Lagebeziehungen von Geraden

**Lagebeziehungen** von Geraden in der Ebene und im Raum

[[Analysis](#) und [Lineare Algebra/Vektorrechnung](#)]

Bei zwei Geraden  $g$  und  $h$  in der Ebene gibt es drei Möglichkeiten:

1. Sie sind identisch ( also  $g = h$  ),
2. sie sind [parallel](#) ( also  $g \parallel h$  ) oder
3. sie schneiden sich.

Im dreidimensionalen Raum kommt eine weitere Möglichkeit dazu:

4. sie sind windschief.

Diese drei bzw. vier verschiedenen Möglichkeiten heißen Lagebeziehungen.

**Untersuchung auf die gegenseitige Lage** mit den Mitteln der [Analysis](#)

Gegeben sind die zugehörigen [linearen Funktionen](#) (falls keine [senkrechte Gerade](#) dabei ist):

$$g_1(x) = m_1 \cdot x + b_1 \text{ und } g_2(x) = m_2 \cdot x + b_2 .$$

Beide Geraden schneiden sich genau dann, wenn sie eine unterschiedliche [Steigung](#) haben (also  $m_1 \neq m_2$ ).

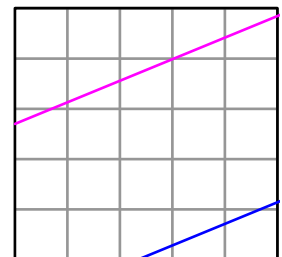
Haben sie die gleiche Steigung, dann sind sie parallel, wenn sie unterschiedliche [y-Achsenabschnitte](#) haben ( $m_1 = m_2$  und  $b_1 \neq b_2$ ).

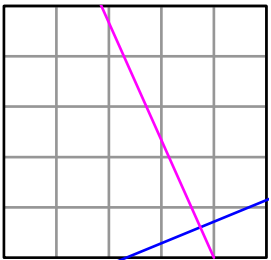
Stimmen Steigung und y-Achsenabschnitt überein, so sind sie identisch ( $m_1 = m_2$  und  $b_1 = b_2$ ).

Zwei verschiedene Geraden sind genau dann parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben.

$$f(x) = \frac{3}{7}x + 0,5;$$

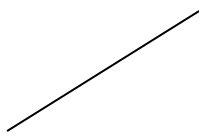
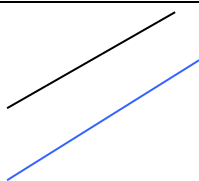
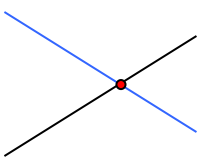
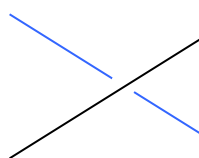
$$g(x) = \frac{3}{7}x - 4,2$$



<p>Zwei Geraden stehen genau dann senkrecht zueinander (<u>orthogonal</u>), wenn die Steigung der einen der negative Kehrwert der Steigung der anderen ist. (Das ist keine eigene Lagebeziehung, nur ein Sonderfall von „sie schneiden sich“)</p>	$f(x) = \frac{3}{7}x + 0,5;$ $g(x) = -\frac{7}{3}x - 4,2$	
---	---	---

### Untersuchung auf die gegenseitige Lage mit den Mitteln der Vektorrechnung

Bei zwei Geraden  $g$  und  $h$  in der Ebene gibt es drei Möglichkeiten:

<p>1. Sie sind identisch (also <math>g = h</math>),</p>	
<p>2. sie sind <u>parallel</u> (also <math>g \parallel h</math>) oder</p>	
<p>3. sie schneiden sich.</p>	
<p>Bei zwei Geraden <math>g</math> und <math>h</math> <i>im Raum</i> kommt eine weitere Möglichkeiten hinzu:</p> <p>4. sie sind windschief. Die Zeichnung ist so gemeint, dass die eine Gerade „tiefer gelegt“ ist und daher die andere nicht schneidet)</p>	



Die Geraden sind häufig in der [Parameterform](#) angegeben:

$$g_1: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{w}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Dabei müssen die Richtungsvektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  beide ungleich dem Nullvektor  $\vec{0}$  sein (sonst wären das keine Geraden).

Nun gibt es zwei Möglichkeiten der Herangehensweise:

Hauptsächlich geht es ja um ein Schnittpunktproblem:

Man untersucht zuerst, ob die Richtungsvektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{w}$  [kollinear](#) sind (d.h. einer ist ein Vielfaches des anderen).

Wenn die Vektorgleichung  $\vec{v} = k \cdot \vec{w}$  lösbar ist, ist das erfüllt.

Dann können die Geraden nur identisch oder parallel sein.

Um herauszufinden, ob die Geraden identisch sind, macht man die Punktprobe und überprüft z.B., ob der Stützvektor von  $g_1$

auf  $g_2$  liegt:

$$\vec{p} = \vec{q} + r \cdot \vec{w}.$$

Wenn diese Vektorgleichung eine Lösung hat, schneiden sich die Geraden, sonst sind sie parallel.

Sind die Richtungsvektoren nicht kollinear, müssen Geraden in der Ebene sich schneiden.

Bei Geraden im Raum muss überprüft werden, ob sie sich schneiden oder windschief sind – das ist rechnerisch das Aufwändigste: Zur Untersuchung auf Schnittpunkte setzt man beide Parameterdarstellungen gleich:

$$\vec{p} + r \cdot \vec{v} = \vec{q} + s \cdot \vec{w} \quad (\text{Man beachte die Umbenennung – die beiden Parameter müssen nun unterscheidbar sein, daher wurde in dem zweiten Ausdruck } s \text{ statt } r \text{ verwendet.})$$

Diese Vektorgleichung entspricht einem [linearen Gleichungssystem](#) mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten (den Parametern  $r$  und  $s$ ). Die Lösung geht durchaus „zu Fuß“, aber der Fußweg ist nicht zu unterschätzen: ein geeigneter Taschenrechner mit einem Befehl wie sys-solv oder ein CAS tun hier gute Dienste. ([hier](#): Anleitung für Nspire)

Wenn es eine Lösung gibt, schneiden sich die Geraden, sonst sind sie windschief.

