Lore Lorentz
LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: Integrierbarkeit

Integrierbarkeit einer Funktion f [Analysis, Integralrechnung]

In der Schulmathematik ist es schwer genug, eine Funktion zu integrieren. Da wir nicht viel darüber nachgedacht, ob das denn bei allen Funktionen auch geht.
In der Mathematik ist die Integrierbarkeit nicht nur ein anspruchsvoller Begriff – streng genommen sind es sogar mehrere anspruchsvolle Begriffe, denn es gibt mehrere Integrierbarkeiten. Wer sich im Mathematik-Studium mit Maßtheorie beschäftigt, lernt, dass es sogar unendlich viele gibt.
Der wichtigste Integralbegriff ist der des Riemannschen Integrals. Er beruht auf dem Grenzwert von Unter- und Obersumme. Wenn diese immer existieren und übereinstimmen ist die Funktion Riemann-integrierbar (das ist das, was in der Schulmathematik unter Integrierbarkeit verstanden wird, wenn das Problem überhaupt thematisiert wird)
Die gute Nachricht: Praktisch alle Funktionen, die in der Schulmathematik vorkommen, sind integrierbar. Insbesondere gilt: Jede stetige Funktion ist integrierbar und sogar:
Jede stückweise stetige Funktion ist integrierbar.
Wenn einem die Schulmathematik reicht, muss man sich also um Integrierbarkeit nie einen Kopf machen.

Nur für den Fall, dass sich jemand dafür interessiert, wie eine nicht integrierbare Funktion denn bitteschön aussehen soll: Der Mathematiker Dirichlet hat eine definiert:
$f(x) = 1$, wenn x eine rationale Zahl ist,
$f(x) = 0$, wenn x irrational ist.
Das ist eine Funktion, aber wenn man versucht, den Funktionsgraphen zu zeichnen, sieht er aus, als wäre er kein Funktionsgraph. Da beliebig nah bei jeder rationalen Zahl auch unendlich viele irrationale liegen und umgekehrt, kann man nicht anders als zwei waagerechte Geraden einzuzeichnen. Das wäre deswegen kein Funktionsgraph, da ein Funktionsgraph keine zwei Schnittpunkte mit irgendeiner senkrechten Gerade haben darf – und das hätte ein so gezeichneter Graph ja immerzu und an jeder Stelle. Tatsächlich beruht das insofern auf der Zeichenungenauigkeit, als man sich ja laut Definition an der Stelle x eine Lücke

entweder in der einen oder in der anderen Gerade vorstellen muss. Es ist also eine Funktion, aber die Untersumme bleibt immer 0 und die Obersumme $b - a$ (also wenn man das Intervall [0;1] betrachtet bleibt die Obersumme 1 und das ist bekanntlich ungleich 0.
Wer solche Beispiele und Gedankengänge mag, kann durchaus ein Mathematikstudium in Erwägung ziehen.