Glossar bestimmtes Integral

Integral, bestimmtes über f von a bis b [Analysis, Integralrechnung]

Gegeben sind eine (integrierbare) Funktion f und zwei Zahlen a und b.

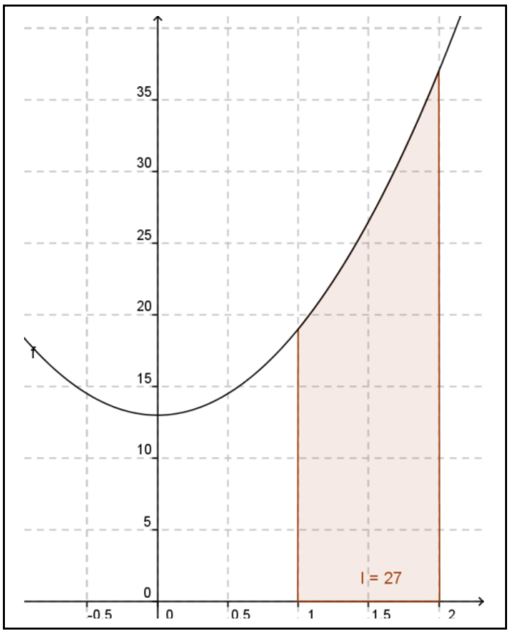
Das bestimmte Integral ist der **Grenzwert der entsprechenden Ober- und Untersummen** für n gegen unendlich. (analytische Definition oder Riemann-Integral).

Das bestimmte Integral ist der orientierte Flächeninhalt, den der Graph von f über [a ; b] mit der x-Achse einschließt („orientiert" heißt dabei, dass die Flächenstücke unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden).

Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

a und b heißen Integrationsgrenzen.
f heißt Integrand oder Integrandenfunktion.
x heißt Integrationsvariable und ist austauschbar, d.h.
$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.



Diese Definition setzt zunächst voraus, dass $a \leq b$ ist.

Um unnötige Fallunterscheidungen zu vermeiden, definiert man, dass sich bei Vertauschung der Integrationsgrenzen das Vorzeichen des bestimmten Integrals ändert:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Man berechnet das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$, indem man eine Stammfunktion F bestimmt, dann die Integrationsgrenzen b und a einsetzt und die Ergebnisse voneinander anzieht:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Für $F(b) - F(a)$ schreibt man auch $[F(x)]_a^b$

Bsp.: Gegeben ist f
mit $f(x) = 6\,x^2 + 13$.
Dann ist F
mit $F(x) = 2\,x^3 + 13\,x$ ***eine*** Stammfunktion von f und demnach gilt: $\int_1^2 f(x)\,dx$
$=[2\,x^3 + 13\,x]_1^2$
= 2·2 ^{3} + 13·2 – (2·1 ^{3} + 13·1)
= 42 – 15 = $\underline{\underline{27}}$.

Mit GTR oder CAS, auch schon mit einfacheren Taschenrechnern
kann man ein bestimmtes Integral direkt berechnen lassen.

Anwendungen:
Wenn $f(t)$ die Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze (in cm/Woche) oder einer Population (in Tieren/Jahr) ist
oder $v(t)$ die Geschwindigkeit (in $\frac{km}{h}$) zum Zeitpunkt t ist,
oder $a(t)$ die Beschleunigung (in $\frac{m}{s^2}$) zum Zeitpunkt t
oder $u(t)$ die Umsatzrate zum Zeitpunkt t
oder $a(t)$ die Absatzrate zum Zeitpunkt t
oder oder oder
dann kann f als Änderungsrate aufgefasst werden.
Mit $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet man dann, wie viele cm die Pflanze oder um welche Anzahl die Population im Zeitraum [a; b] gewachsen ist,
wie viele km im Zeitraum [a; b] zurückgelegt wurden
um wie viel $\frac{m}{s}$ das Objekt im Zeitraum [a; b] schneller geworden ist
wie viel Umsatz im Zeitraum [a; b] insgesamt erzielt worden ist
wie viel im Zeitraum [a; b] insgesamt abgesetzt werden konnte.

Natürlich gibt es noch viele weitere Anwendungen (Berechnung von Weglängen im Raum, Berechnung der Arbeit in der Physik: Berechnung von Rotationsvolumina …)

Links:

	Training http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/bestint.htm. Video: hier