Glossar: h-Methode

h-Methode zur Berechnung der Ableitung von f an der Stelle x_0 [Analysis, Differentialrechnung]

Die Steigung f zwischen zwei Punkten auf dem Funktionsgraph kann man mit Hilfe der Formel

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

berechnen – es ist ein Differenzenquotient.

Die Frage nach der exakten Steigung von f an der Stelle x_0 kann man aber auf diesem Weg nicht direkt beantworten.

Näherungsweise kann man eine Hilfsstelle x habe bei x_0 und dann vielleicht immer näher bei x_0 wählen, aber auf diesem Weg bleibt es bei einer Näherungslösung.
Stattdessen betrachtet man nun alle möglichen Hilfsstellen x gleichzeitig:
Bei der h-Methode wählt man $x = x_0 + h$ mit $h \neq 0$. Für ein betraglich kleines h.

Wir führen die h-Methode hier zunächst für eine bestimmte Funktion f und an einer bestimmten Stelle x_0 durch:

Bsp.: $f(x) = 4x^2 + 2x$.
Gesucht ist die Steigung von f an der Stelle $x_0 = 3$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(3+h)^2 + 2(3+h) - (4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(3^2 + 2 \cdot 3h + h^2) + 2 \cdot 3 + 2h - 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4(9 + 6h + h^2) + 6 + 2h - 36 - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{36} + 24h + 4h^2 + \cancel{6} + 2h \cancel{-36-6}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{24h + 4h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4h^2 + 26h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 4h + 26 = \underline{\underline{26}}$$

Damit ist die gesuchte Steigung berechnet:
$f'(3) = 26$.

Anleitung: Man setzt also immer konsequent in den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ein:
Zuerst ersetzt man darin x_0 durch die entsprechende Stelle (im Beispiel oben: $x_0 = 3$),
dann ersetzt man jedes $f(\ldots)$ durch die konkrete Funktionsvorschrift, also oben: $4 \cdot (\ldots)^2 + 2 \cdot (\ldots)$.
Das vereinfacht man weiter (bei quadratischen Funktionen durch Verwendung der Binomischen Formeln, Auflösen der Klammern, Zusammenfassen (jeweils aller Terme mit h^2 und der mit h, und der ohne h). Am Ende kürzt man.

Erläuterungen als ppt des Kepler-Gymnasiums oder unter mathebibel
Streng mathematisch gesehen ist hierfür der Begriff des Grenzwerts einer Folge grundlegend.

Auf ihm baut der Begriff des Grenzwerts einer Funktion für x gegen ∞ wie auch für x gegen eine bestimmte Stelle x_0 auf.