Glossar: Grenzwert einer Folge

Grenzwert einer Folge [Analysis]

Eine Zahl, der sich die Glieder der Folge immer weiter annähern.

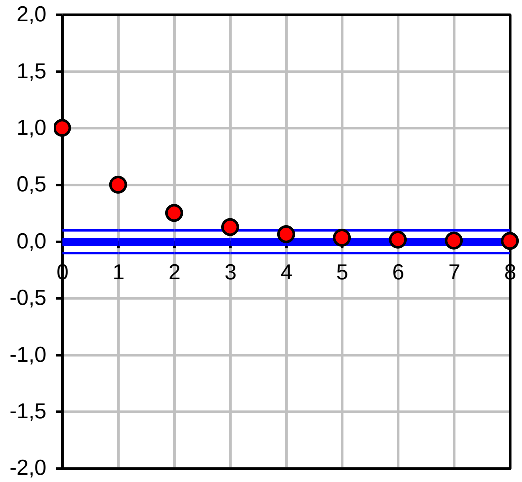
Genauer: Gegeben ist eine Folge (a_n). Eine Zahl a, für die gilt: in jeder ε-Umgebung von a liegen ab irgend einer Stelle alle Glieder von a_n, heißt Grenzwert der Folge.

D.h.: in jedem noch so dünnen waagerechten Streifen um a liegen „irgendwann“ alle Folgeglieder, die noch kommen.

Mathematisch: Zu jedem ε > 0 gibt es ein n, so dass $|\ a - a_i\ | < \varepsilon$ für alle $i > n$.

Bem.: Hübsch ist auch folgende Formulierungsvariante: Eine Zahl a, für die gilt:
in jeder ε-Umgebung von a liegen fast alle Glieder von a_n, heißt Grenzwert der Folge.

Bsp. 1: $a_n = \frac{1}{2^n}$, also $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots;$
Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. (Man sagt auch, a_n geht gegen 0).



Die dicke blaue Linie markiert den Grenzwert. Man sieht: die Werte der Folge nähern sich dem Grenzwert. die dünnen blauen Linien markieren einen Streifen um den Grenzwert – in diesem Fall hat er die Breite 0,2. Man sieht, dass die

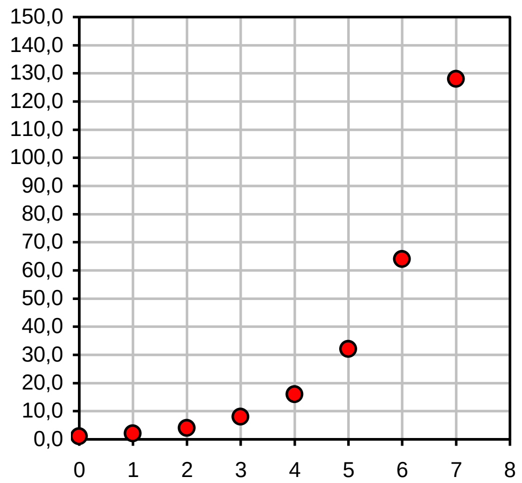
Folgenglieder ab einer bestimmten Stelle in diesen Streifen fallen und ihn dann nicht mehr wieder verlassen – hier ist dies ab der Stelle $n = 4$ der Fall.

Verallgemeinerung: Gegeben ist eine Folge (a_n). Eine Zahl a ist dann der Grenzwert von a_n, für jeden noch so dünnen Streifen um a ab einer bestimmten Stelle n die Folgenglieder a_n in diesen Streifen fallen.

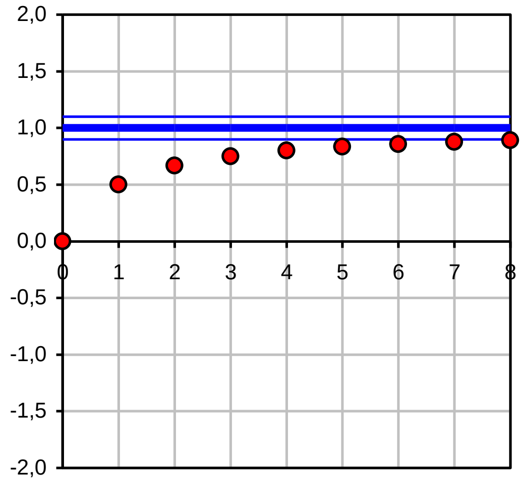
Bem.: Wachsen die Glieder der Folge über jede Grenze, so sagt man, die Folge hat den Grenzwert (plus) unendlich. Fallen die Glieder der Folge unter jede Grenze, so sagt man, die Folge hat den Grenzwert minus unendlich. Da unendlich und minus unendlich keine Zahlen sind, trifft auf sie die obige Definition streng genommen nicht zu. Man nennt sie daher „uneigentliche Grenzwerte“.

Bezeichnung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Bsp. 1: $a_n = 2^n$, also 1; 2; 4; 8; 16; ... Die Folge wächst über jede Grenze. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

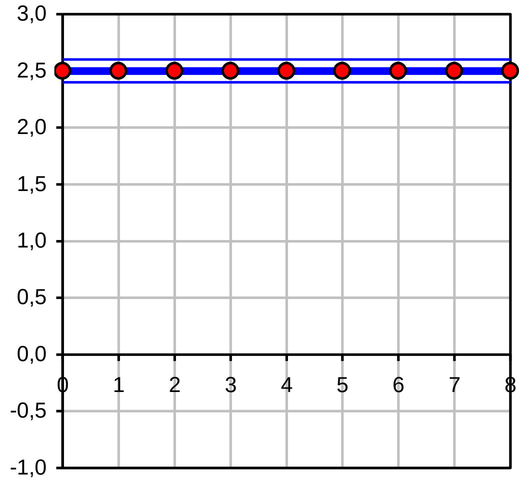


Bsp. 2: $a_n = \frac{n}{n+1}$; 0; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$; …;
Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

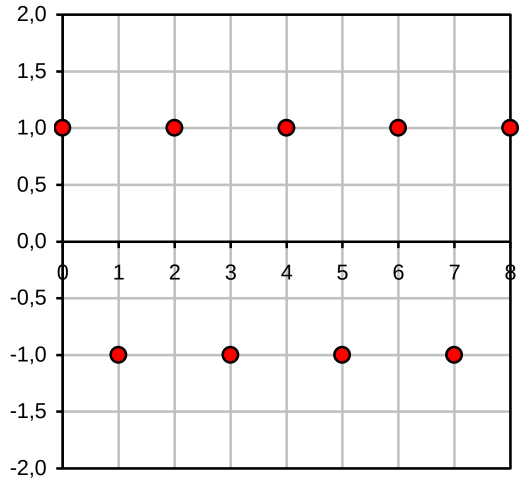


Bem: Es ist dabei nicht zwingend erforderlich, dass der Grenzwert erreicht (also als Wert angenommen) wird – aber es ist auch nicht verboten.

Bsp. 3: a_n= 2,5 (also die konstante Folge, deren Glieder alle 2,5 sind: 2,5; 2,5; 2,5; 2,5; ...); Grenzwert: $\lim\limits_{n\to\infty} 2{,}5 = 2{,}5$.



Bsp. 4: a_n= $(-1)^n$; 1; -1; 1; -1; 1; -1; ...; Die Folge hat keinen Grenzwert.



Links:
http://www.zum.de/Faecher/M/NRW/pm/mathe/zfolgeng.htm.

Das Konzept des Grenzwerts ist nicht so leicht zu verstehen. Eine gute Einführung gibt Walter Braun (pdf).