Glossar: Fernverhalten

Fernverhalten [Analysis]

Beim Fernverhalten einer Funktion geht es das Verhalten „weit weit draußen“, also für betraglich große x.

Dazu gehören die Grenzwerte
$\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
sowie die nicht-senkrechten Asymptoten.

Bei einer ganzrationalen Funktion entscheiden Grad und Leitkoeffizient über das Fernverhalten (Grenzwert für x gegen -∞ und für x gegen ∞)

Es gilt:
Ist der Leitkoeffizient a_n von f positiv, so ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$
Ist der Leitkoeffizient a_n von f negativ, so ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$
Ist der Grad n von f gerade, so ist sind beide Grenzwerte identisch: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x)$,
ansonsten haben beide das entgegengesetzte Vorzeichen: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Bsp.: Gegeben ist ein Funktion h in Normalform, die folgendermaßen beginnt: $h(x) = -0{,}02x^8 + \cdots$
Dann ist der Leitkoeffizient (das ist $a_8 = -0{,}02$) negativ, also gilt:

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty$$

Weiterhin ist der Grad (das ist $n = 0$) gerade und daraus folgt, dass sich das Vorzeichen beim Grenzwert für x gegen $-\infty$ umkehrt, also

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \infty$$

Bei einer gebrochen-rationalen Funktion kommt es darauf an, ob der Zählergrad oder der Nennergrad größer ist:

Bsp.: $f(x) = \frac{0{,}5x^2+3x-1}{4x^3-5}$: Das Nennerpolynom $4x^3 - 5$ hat den Grad 3, Das Zählerpolynom $0{,}5x^2 + 3x - 1$ hat nur Grad 2, also einen kleineren Grad. In einem solchen Fall sind beide Grenzwerte sind 0: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
Sind Zählergrad und Nennergrad gleich, so gibt es waagerechte Asymptoten:

Bsp.: $f(x) = \frac{2x+3}{4x-5} \overset{\textit{kürzen um x}}{=} \frac{2+\frac{3}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{}}{4-\frac{5}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{}} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

d.h. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{2x+3}{4x-5} \overset{\textit{kürzen um x}}{=} \frac{2+\frac{3}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{}}{4-\frac{5}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{}} \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$,

d.h. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

Fernverhalten von e-Funktionen: hier