Glossar: Differenzenquotient

Differenzenquotient von f bzgl. der Stellen x_0 und x_1
[Analysis, Differentialrechnung]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

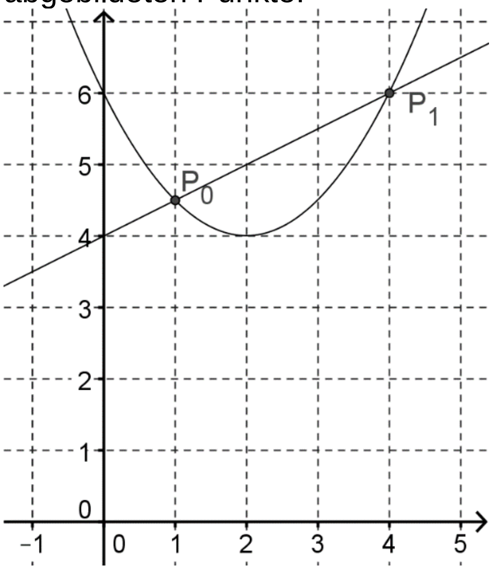
Steigung der Geraden durch die
Punkte P_0 (x_0 | y_0) und P_1 (x_1 y_1).

Beispiel:

Gegeben sind die quadratische Funktion f
mit $f(x)$= 0,5 x^2 - 2x + 6
und die beiden Stellen x_0 = 1 und x_1 = 4.
Dann ist der zugehörige Differenzenquotient:

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{6-4{,}5}{4-1} = \frac{1{,}5}{3} = \frac{1}{2}$$

Das entspricht der Steigung der Geraden durch die abgebildeten Punkte:

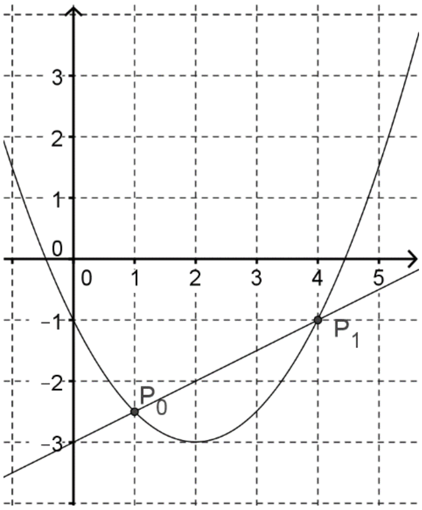


Bem.: Wie so oft muss man bei den Vorzeichen aufpassen, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel:

Gegeben sind die quadratische Funktion f
mit $f(x)$= 0,5 x² - 2x -1
und die beiden Stellen x_0 = 1 und x_1 = 4.
Dann ist der zugehörige Differenzenquotient:

$$\frac{\boldsymbol{f(4) - f(1)}}{\mathbf{4 - 1}} = \frac{\mathbf{-1 - (-2,5)}}{\mathbf{4 - 1}} = \frac{\mathbf{1,5}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$



Bem.: Interessiert man sich besonders für das Verhalten der Funktion ganz in der Nähe einer bestimmten Stelle x_0, so kann man zunächst eine Hilfsstelle x in der Nähe von x_0 wählen und den Differenzenquotienten $\frac{\boldsymbol{f(x)-f(x_0)}}{\boldsymbol{x-x_0}}$ berechnen und dann schrittweise x immer näher an x_0 wählen.
Daraus ergibt sich in der Regel ein Grenzwertprozess: Der Differenzenquotient nähert sich immer mehr einem bestimmten Wert an – dies ist dann der Differentialquotient, also die Ableitung an der entsprechenden Stelle.
[Das klappt immer, außer die Funktion ist an der betreffenden Stelle nicht differenzierbar.]

Anwendung:

In der Analysis und vielen Anwendungen ist die Steigung wohl *der* zentrale Begriff überhaupt, weil er die Veränderung einer Größe beschreibt (und quantitativ angibt).
Der Differenzenquotient ist, wenn man eine Hilfsstelle nahe der Stelle wählt, die einen gerade interessiert, eine Näherung für die Steigung an dieser Stelle.
Somit ist der Differenzenquotient die entscheidende Vorstufe

und Basis für den Ableitungsbegriff. Der Differentialquotient (die Ableitung) ist der Grenzwert des Differenzenquotienten („h-Methode“).

Beliebte Fehler:

Verwechslung x und y: Häufig werden x und y verwechselt:
$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}$ statt $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.
Vielleicht wird das so gerne vertauscht, weil man nach dem Alphabet geht: erst x, dann y.
Vorschlag zur Absicherung, dass man es richtig macht:
Zeichnet man die Punkte ein, so erkennt man leicht, ob die Steigung z.B. größer oder kleiner als 1 ist.
Oder: Man macht sich immer wieder klar, dass die Steigung umso größer ist, je größer der Höhenunterschied ist – und das ist die Differenz der Funktionswerte.
Vorzeichenfehler (s.o. im Beispiel)
KEIN FEHLER ist übrigens das Vertauschen der beiden Punkte: $\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
Rechne es am Beispiel oben nach: es ist wirklich dasselbe!

$$\frac{f(1) - f(4)}{1 - 4} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$$

(Für mathematisch Interessierte: Überlegt auch mal, warum eigentlich!)
ABER ACHTUNG, man kann trotzdem etwas falsch machen:
$\frac{f(1) - f(4)}{4 - 1} \neq \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ (Es kommt nämlich genau das Negative heraus)

Siehe: Sekantensteigung, durchschnittliche Änderungsrate.

Alls klar? Check Differenzenquotient

weitere Links zum Thema Differentialrechnung