Glossar: Determinante

Determinante einer quadratischen Matrix [Lineare Algebra, Matrizenrechnung]

Bezeichnung: $det(A)$.

Berechnung für 2×2-Matrizen:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Geometrisch im Zweidimensionalen:
Die Determinante von $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist der (gerichtete) Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

Geometrisch im Dreidimensionalen: Die Determinante von eine Matrix des Formats 3×3 ist das (gerichtete) Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Spats – also das Spatprodukt.

Eigenschaften:
Für eine Einheitsmatrix gilt: $\det(E_n)=1$
Vervielfacht man die (n×n)-Matrix mit dem Faktor c, so vervielfacht sich die Determiante mit dem Faktor c^n:
$\det(c \cdot A) = c^2 \cdot \det(A)$.
Vertauscht man zwei Spaltenvektoren der Matrix, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

Anwendungen:
Untersuchung von linearen Gleichungssystemen auf Lösbarkeit bzw. eindeutige Lösbarkeit.
Ein lineares Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante von A ungleich Null ist.
Eine Matrix ist genau dann invertierbar (d.h. es gibt eine Inverse), wenn ihre Determinante ungleich Null ist.

Determinanten kann man auch verwenden, um Lineare Gleichungssysteme zu lösen, in der Praxis ist der Rechenaufwand dabei aber zu hoch.

Übungen: mathe-online.at