Glossar: Definitionslücke

Definitionslücke [Analysis, insbes. gebrochen-rationale Funktionen]

Da das Teilen durch null nicht definiert ist, sind gebrochen-rationale Funktionen an den Stellen nicht definiert, an denen ihre Nennerfunktion Null wird.
Die **Nullstellen der Nennerfunktion** nennt man daher Definitionslücken.

Ansatz: Gegeben ist f mit $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$, dann berechnet man die Definitionslücken mit $n(x) = 0$.

Der Grund ist, dass die Division durch Null nicht definiert ist.

Wer Nullstellen (des Nenners) berechnen kann, der kann demnach auch Definitionslücken (gebrochen-rationaler Funktionen) bestimmen.

Bem. 1: Die Definitionsmenge einer gebrochen-rationalen Funktion f umfasst alle reellen Zahlen außer den Definitionslücken von f.

Beispiel 1: $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.
Bestimmung der Definitionslücken:
$x - 4 = 0 \mid +4$
$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{4}}$. Die einzige Definitionslücke liegt bei x = 4
(Sie gehört zum Linearfaktor (x-4)).
$D_{max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Beispiel 2: $f(x) = \frac{x+3}{x^2-x-12}$.
Bestimmung der Definitionslücken:
$x^2 - x - 12 = 0 \quad \mid +12$
$\Leftrightarrow x^2 - x = 12 \quad \mid$ quadr. Ergänzung: $+\left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 12{,}25 \mid +4$

$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 12{,}25$

$\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 3{,}5 \;\vee\; x - \frac{1}{2} = -3{,}5 \quad | + \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = 4 \vee x = -3$

Die Definitionslücken sind also -3 und 4.

$D_{max}(f) = \mathbb{R} \setminus \{ -3; 4 \}$.

Bem. 2: Bei den Definitionslücken gebrochen-rationaler Funktionen unterscheidet man zwischen Polstellen (mit oder ohne Vorzeichenwechsel) und hebbaren Lücken.

Eine hebbare Lücke erkennt man daran, dass sich der entsprechende Linearfaktor herauskürzen lässt.

Das lässt sich an Beispiel 2 erläutern: $f(x) = \frac{x+3}{x^2 - x - 12}$

Beim Nullsetzen des Nenners haben wir gesehen, dass er die Nullstellen -3 und 4 hat. Wir können den Nenner in der faktorisierten Form schreiben: $x^2 - x - 12 = (x+3)(x-4)$,

also: $f(x) = \frac{x+3}{(x+3)(x-4)}$. Den Linearfaktor x+3 kann man kürzen, also ist x = -3 eine hebbare Lücke. Der Faktor x – 4 bleibt im Nenner erhalten, also liegt bei x = 4 eine Polstelle vor.