Glossar: Binomialverteilung

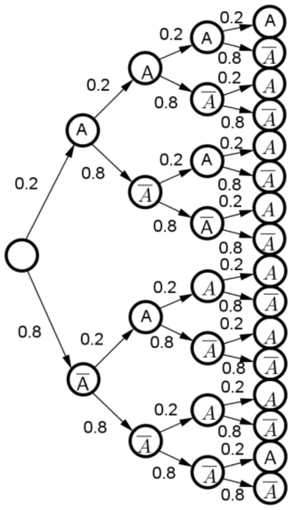
Binomialverteilung [Stochastik]

Führt man ein und dasselbe Zufallsexperiment immer wieder durch und interessiert sich nur für die Anzahl, mit der ein bestimmtes Ergebnis auftritt, so hilft die Binomialverteilung bei der Berechnung der betreffenden Wahrscheinlichkeiten.

Zufallsversuche, bei denen man sich jedes einzelne Mal nur dafür interessiert, ob ein Ereignis eintritt (Treffer) oder nicht, nennt man auch Bernoulliversuche.

Führt man denselben Bernoulliversuch mehrfach hinter-einander aus, so spricht man von einer Bernoullikette.

Beispiel 1: A: Treffer,
X: Anzahl der Treffer (das ist die Zufallsgröße),
Anzahl der Versuche: $n = 4$ (Stichprobengröße),
Trefferwahrscheinlichkeit: $p = 0{,}2$
Nicht-Treffer-Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p = 0{,}8$



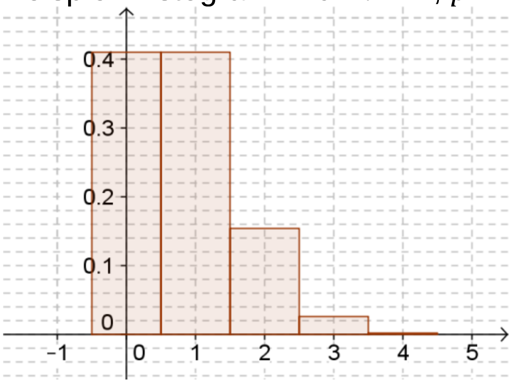
Formel von Bernoulli:

Die Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer berechnet sich so:
$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
$= \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$
Dabei ist $\binom{n}{k}$ der Binomialkoeffizient

Erläuterung:
Es geht um die Wahrscheinlichkeit, bei n Versuchen genau k Treffer zu erzielen – dafür sind auch $(n-k)$ Nichttreffer nötig.
Die Wahrscheinlichkeit dafür, zuerst k Treffer hintereinander und dann $(n-k)$ Nichttreffer zu erzielen ist nach der ersten Pfadregel: $p^k \cdot q^{n-k}$. Das könnte man am Baum einzeichnen – es entspricht genau einem Pfad und einer zugehörigen „Blattwahrscheinlichkeit"
Diese Rechnung vernachlässigt aber all die anderen Abfolgen von k Treffern und $(n-k)$ Nichttreffern: Sie haben alle dieselbe Wahrscheinlichkeit wie der Pfad, dessen Wahrscheinlichkeit wir eben berechnet haben.
Die Anzahl dieser Abfolgen lässt sich mit dem Binomialkoeffizenten berechnen. Also gilt:
$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Darstellung als Histogramm:

Die Höhe des Balkens entspricht dabei der Wahrscheinlichkeit des jeweiligen Ergebnisses:
Beispiel-Histogramm für $n=4$; $p=0{,}2$



Berechnung von Binomialverteilungen mit dem Taschenrechner/CAS geht so:
TI30XPro
TI-Nspire

Die Binomialverteilung ist (im Vergleich zu anderen) besonders einfach:
Ihre Berechnung ist z.B. wesentlich weniger aufwändig als die der hypergeometrischen Verteilung (Ziehen ohne Zurücklegen).

Die Berechnung des Erwartungswerts ist denkbar einfach:
$\mu = E(X) = n \cdot p$

Die Berechnung der Varianz ist ebenfalls einfach:
$\sigma^2 = Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = n \cdot p \cdot q$

Bsp.: Binomialverteilung mit n = 100, p = 0,25:
$\sigma^2 = 100 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 18{,}75$

Checklist: mathebaustelle: checklist_binomialverteilung
Check Binomialverteilung mit Formel von Bernoulli
Check Binomialverteilung (auch ohne Formel von Bernoulli)

Links: Zur Formel von Bernoulli: lo-net
Eine internet-Seite zum Thema:
http://www.rither.de/a/mathematik/stochastik/wahrscheinlichkeitsverteilungen/binomialverteilung/
Einführung als word Datei von Florian Modler
Informationen mit interaktivem Rechner und Histogramm
http://www.mathematik.ch/anwendungenmath/wkeit/binomialvert.php

Strobl: Grundlagen Übungen Lsg