

Glossar: Betriebsoptimum

Betriebsoptimum [Analysis, ökonomische Anwendungen]

Minimalstelle der Stückkostenfunktion k .

Bezeichnung: x_{BO}

Ansatz: $k'(x) = 0$

alternativer Ansatz: $K'(x) = k(x)$

ökonomische Bedeutung:

Es geht nicht nur darum, irgendeine Kostenart (hier eben die Stückkosten) zu minimieren, sondern es geht um ökonomische Grenzen und Entscheidungen.

$k(x_{BO})$ ist die langfristige Preisuntergrenze.

Fällt der Preis auf diese Grenze, so steht eine Entscheidung an: Die Unternehmung kann nicht mehr mit Gewinn arbeiten, . Nun gibt es für die Unternehmung nur noch eine Chance, wenigstens die Kosten zu decken: Es muss x_{BO} ME produzieren und absetzen.

Fällt der Preis unter die langfristige Preisuntergrenze, so arbeitet der Betrieb mit Verlust und wird langfristig nicht wirtschaftlich überleben können.

Beispiel: Berechnung des Betriebsoptimums und der langfristigen Preisuntergrenze mit Differentialrechnung: [hier](#)

Die Gesamtkostenfunktion K eines Unternehmens ist gegeben durch die Gleichung

$$K(x) = x^3 - 6x^2 + 13x + 10.$$

Berechnen Sie das Betriebsoptimum.

$$k(x) = x^2 - 6x + 13 + \frac{100}{x}$$

$$k'(x) = 2x - 6 - \frac{100}{x^2}$$

notwendige Bedingung $k'(x) = 0$

$$2x - 6 - \frac{100}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 100 = 0 \quad | : 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 50 = 0 \quad | : 2$$



Für die weitere Rechnung braucht man nun Glück oder Hilfsmittel (wie polysolv).
 Im vorliegenden Fall kann man auch mit Hilfe einer Wertetabelle herausfinden, dass $x = 5$ sein muss. Somit ist das Betriebsoptimum $x_{BO} = 5$ [ME].

Die langfristige Preisuntergrenze liegt bei $k(5) = 28 \left[\frac{GE}{ME} \right]$.

Die hinreichende Bedingung kann man noch überprüfen, aber bei [ertragsgesetzlichen Kostenfunktionen](#) ist sie sowieso garantiert.

Alternativ:

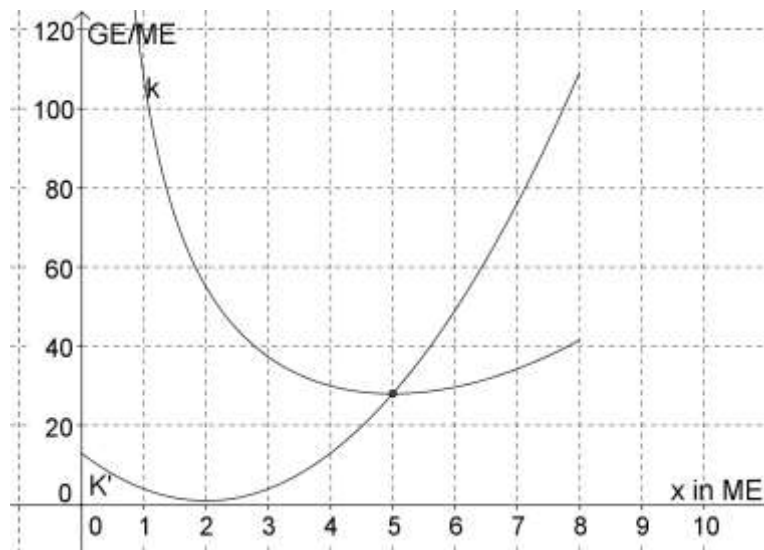
$$3x^2 - 12x + 13 = x^2 - 6x + 13 + \frac{100}{x}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x - \frac{100}{x} = 0 \quad | \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6x^2 - 100 = 0$$

Für die weitere Rechnung braucht man schon wieder Glück oder Hilfsmittel (wie CAS oder polysolv).

Wie oben ergibt sich nach längerer Suche $x = 5$.



Bem.: In der Regel geht man von einer (Gesamt-) [Kostenfunktion](#) vom Grad 3 aus:

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dann lautet die Gleichung der Stückkostenfunktion

$k(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$ und ihre [Ableitung](#) ist

$$k'(x) = 2ax + b - \frac{d}{x^2}$$

Die [notwendige Bedingung](#) zur Bestimmung des Betriebsoptimums ist demnach: $k'(x) = 0$



$$\Leftrightarrow 2 a x + b - \frac{d}{x^2} = 0 \quad | \cdot x^2 \text{ (Äquivalenzumformung, da } x \neq 0$$

vorausgesetzt werden kann)

$$\Leftrightarrow 2 a x^3 + b x^2 - d = 0.$$

Wir erhalten also eine Gleichung vom Grad 3. Für eine exakte Lösung sind wir darauf angewiesen, eine ganzzahlige Lösung durch (systematisches) Probieren zu finden.

Ansonsten können wir das Betriebsoptimum nur mit Hilfe eines entsprechenden Tools oder Taschenrechners bestimmen (in der Regel näherungsweise) oder näherungsweise durch Intervallschachtelung oder mit Hilfe eines grafischen Verfahrens:

Wenn der Graph der Gesamtkostenfunktion gegeben ist, zeichnet man eine Ursprungsgerade, die den Graph berührt (also die eine Tangente ist). Die x-Koordinate des Berührungspunkts ist dann das Betriebsoptimum.

Danach müsste man streng genommen noch untersuchen, ob die gefundene Lösung der Gleichung die einzige Lösung ist. In der Regel ist das nur die Überprüfung einer Selbstverständlichkeit: Bei kubischen Kostenfunktionen gibt es immer nur eine Minimalstelle der Stückkostenfunktion.

Siehe auch: langfristige Preisuntergrenze.

Übungsaufgaben: [ab betriebsminimum -optimum](#)

weitere Links zum Thema [ökonomische Funktionen](#)

