Beispiel: Extrempunkt/Sattelpunkt

Gegeben: $f(x) = -2\,x^3 + 6\,x^2 - 6\,x - 5;\ x \in \mathbb{R}$.

Gesucht: Extrempunkte – erstmal händisch .

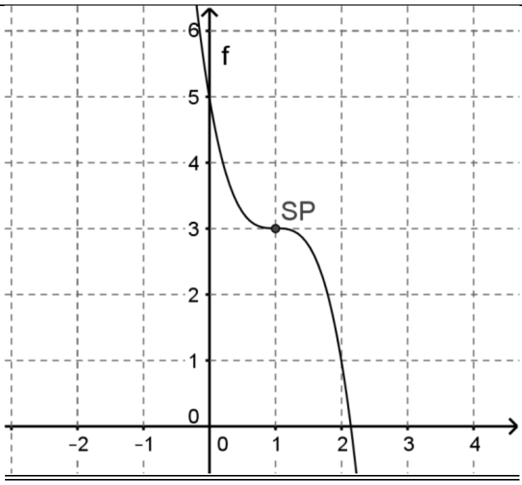
$f'(x) = -6\,x^2 + 12\,x - 6$
$f''(x) = -12\,x + 12$

notw.Bed.: $f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow -6\,x^2 + 12\,x - 6 = 0$ |:(-6)
$\Leftrightarrow\ x^2 - 2\,x + 1 = 0$ | quadrat. Ergänz. bzw. binomische Formel
$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$\Leftrightarrow x = 1$ (einzige *mögliche* Extremstelle)

hinr.Bed.: zusätzlich $f''(x) \neq 0$
$f''(1) = 0$ – daraus ist keine Folgerung möglich.

Nun untersucht man, ob f erst steigt und dann fällt (oder umgekehrt), d.h., man untersucht, ob f' bei $x = 1$ das Vorzeichen wechselt.
An der obigen Rechnung kann man die faktorisierte Form von f' erkennen:
$f'(x) = 6\,(x-1)^2$
Daran sieht man, dass $x = 1$ eine doppelte Nullstelle von f' ist,
Also wechselt f´ dort das Vorzeichen nicht.
Damit ist gezeigt, dass $x = 1$ eine Sattelstelle ist.
Um es ganz klar zu sagen: f hat keine Extrempunkte.

Will man noch den Sattelpunkt bestimmen, so muss man in f einsetzen: f(1)=3
Sattelpunkt <u>W(1 | 3)</u>



Mit dem **Nspire CAS** geht das so:

f(x) := - 2·x^3 + 6·x^2 - 6·x - 5

fi(x):= $\frac{d}{dx}f(x)$

fii(x):= $\frac{d}{dx}fi(x)$

solve(fi(x)=0,x) [Ergebnis: 1]

fii(1) [Ergebnis: 0, also Pech gehabt!]

factor (fi(x)) [Ergebnis: $6\,(x-1)^2$]

[Man erkennt selbst: f´ hat bei $x = 1$ keinen Vorzeichenwechsel, also liegt eine Sattelstelle vor]

fi(1)=3 also: Sattelpunkt (1 | 3)