1.2 Funktionsbegriff

Sinn des Funktionsbegriffs

Wir haben nun eine neue Sprechweise kennen gelernt – d.h. einige neue Vokabeln. Es stellt sich die Frage, was für Vorteile diese Sprechweise bringt. Zunächst einmal: Sie ist kurz, da sie alles im Moment Überflüssige weglässt. Aus dem gleichen Grund ist sie sehr universell einsetzbar.

Die oft komplexen realen Problemsituationen werden in ein mathematisches Modell übertragen. Das Modell kann die Wirklichkeit nicht vollständig erfassen – ebenso wenig, wie an einem Gebäudemodell, das ein Architekt bastelt, Türgriffe zu erwarten sind. Aber innerhalb des mathematischen Modells können Fragestellungen exakt analysiert und Lösungen mit beliebiger Genauigkeit ermittelt werden. Damit bietet die Mathematik sich als wirkungsvolles Analyseinstrument an – ob die mathematische Lösung auf den realen Sachverhalt, auf den sie zurückübertragen wird, „bis auf die letzte Nachkommastelle" genau zutrifft, hängt vom Einzelfall ab.

Das mathematische Modell ist dabei vielseitig verwendbar. Im Lackbeispiel steht $l(x) = -\frac{3}{4}x + 60$ für die nach so und so viel Stunden noch verbleibende Lackmenge.

Aber betrachte einmal folgende **Beispiele:**

B1 Ein kleines Boot ist noch 60 m vom Ufer entfernt, auf das es sich mit $0{,}75\,\frac{m}{s}$ zu bewegt.

B2 Eine Regentonne leckt. Pro Stunde tritt ein ¾ Liter Wasser aus. Zurzeit befinden sich noch 60 Liter in der Tonne.

B3 Von einem 60 m langen Stahlträger werden jeweils 75 cm lange Teilstücke abgesägt, die als Stützstreben dienen sollen.

B4 Einer Agentur stehen 60 000 € für eine Imagekampagne zur Verfügung. Intern werden dabei 1000 € als eine Geldeinheit bezeichnet. Eine ganzseitige

Annonce in der Regionalpresse verschiedener Gebiete kostet 750 €. Wie viele Anzeigen geschaltet werden, ist noch nicht entschieden.

B5 Eine 60 cm lange Kerze brennt in jeder Minute 0,75 cm weiter herunter.

Aufgabe 1

a) Aus welchen Gründen könnte es bei den Beispielen (B1) bis (B5) zu Ergebnissen kommen, die die realen Verhältnisse nur ungenau beschreiben?

b) Bei welchen Beispielen könnte man für x sinnvollerweise ausschließlich ganze Zahlen einsetzen, bei welchen nur bestimmte (also keine beliebigen) Brüche für x zulassen.

c) Erfinde selbst ein weiteres Anwendungsbeispiel („B6“) für die Funktion l.

Aufgabe 2 Funktionen rund um den Kaffee

„Ein Mathematiker ist eine Maschine, die Kaffee in Theoreme verwandelt"

Paul Erdös (ungarischer Mathematiker)

Eine der Funktionen f_1 bis f_6, deren Graphen auf der anderen Seite abgebildet sind, gibt wieder, …

- … wie sich die Wassermenge im entsprechenden (Wassereinfüll-)Behälter der Kaffeemaschine (Abb. 1) in Abhängigkeit von der Zeit entwickelt (zum Startzeitpunkt wurde gerade Wasser eingefüllt),
- … wie sich die eingefüllte Menge Kaffee auf die Höhe auswirkt, bis zu der die abgebildete Kaffeekanne gefüllt ist (Abb. 2),
- … welche Menge Kaffeepulver in Gramm nötig ist, um so und so viel Tassen Kaffee zu kochen,
- … wie sich die Temperatur des bereits in die Tasse eingegossenen Kaffees im Lauf der Zeit entwickelt.

(Wassereinfüll-)Behälter

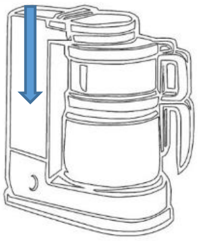


Abb. 1

kegelförmige Kanne

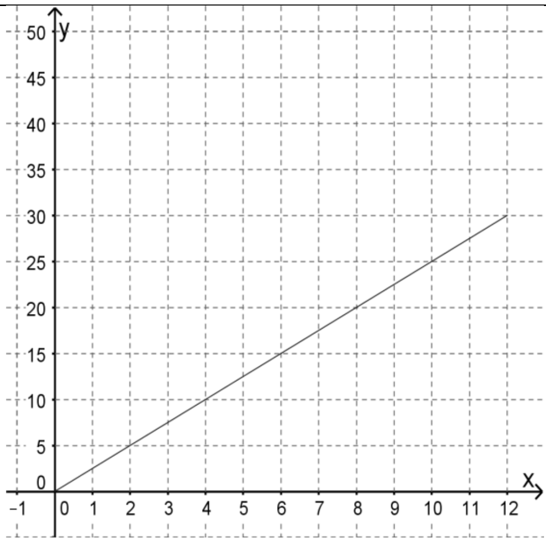
Abb. 2

Bearbeite zunächst **a)** in Einzelarbeit (15 Min.), vergleiche dann mit deinem Nachbarn. **b)** und **c)** sind Bonus-Aufgaben

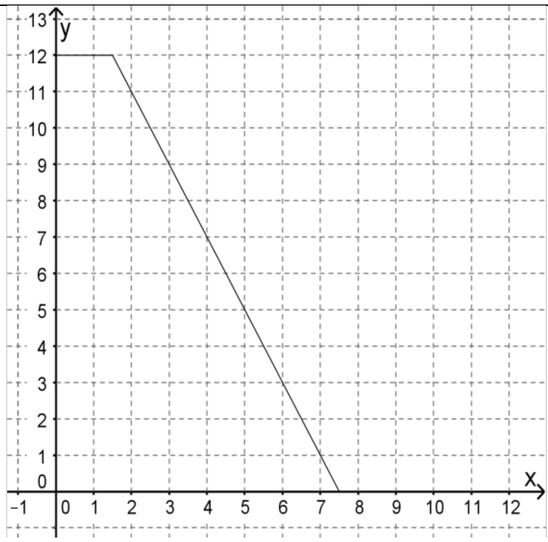
a) Ordne den Sachzusammenhängen die Funktionen begründet die Graphen f_1 bis f_6 zu.
(Hilfsüberlegungen: Welche Funktion müsste steigen, welche fallen? Müsste die entsprechende Funktion gleichmäßig steigen bzw. fallen oder anfangs stärker oder weniger stark als später?)

b) Skizziere den Graph zu der Funktion, die angibt, wie sich die fertige Kaffeemenge während des Kaffeekochens in Abhängigkeit von der Zeit entwickelt.

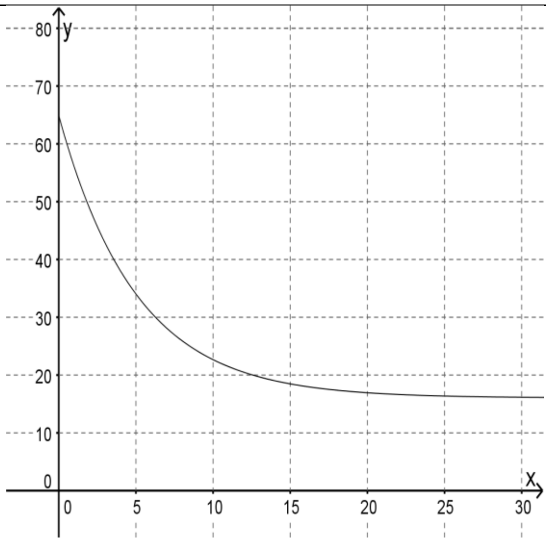
c) Beschreibe einen der Graphen möglichst genau. Wähle einen Punkt auf dem Graph und erläutere, was er im Sachzusammenhang bedeutet.



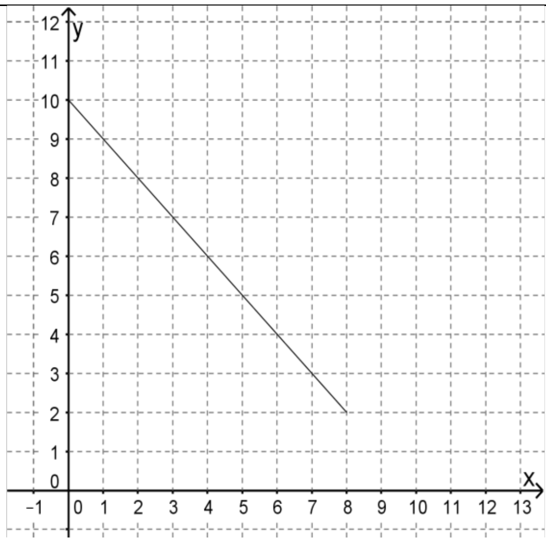
f_1



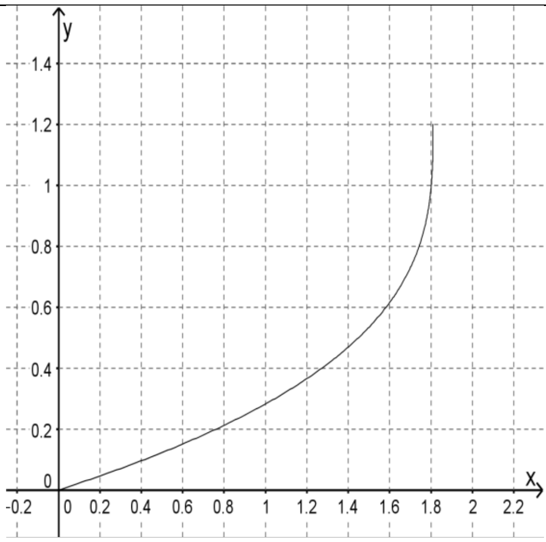
f_2



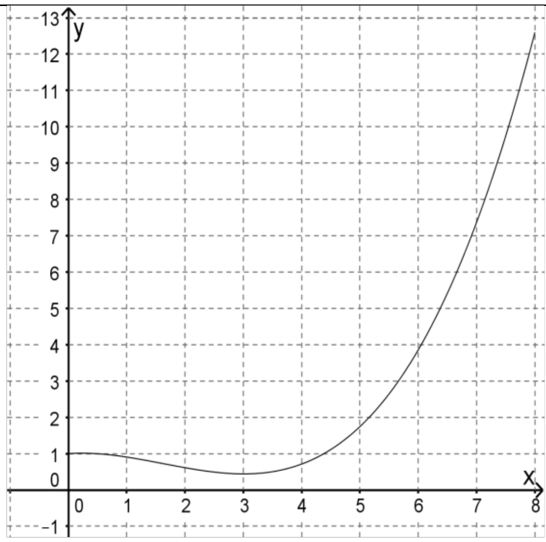
f_3



f_4



f_5



f_6

Definition

Spätestens jetzt haben wir genug Vorerfahrungen mit dem Begriff der Funktion gesammelt, um ihn nun mathematisch genau zu fassen.

Eine *Funktion* f mit *Definitionsmenge* $D(f)$ ist eine Zuordnung, die jeder Zahl x aus der Menge D von f genau eine Zahl y zuordnet.

Die Menge aller Zahlen y, die einem Element x der Definitionsmenge als Funktionswert $f(x)$ zugeordnet werden, heißt *Wertemenge* $W(f)$ von f.

Bezeichnungen

Die Definitionsmenge von f wird mit $D(f)$ bezeichnet. Es handelt sich dabei um die Menge der Zahlen, die man in f einsetzen kann.

Die Wertemenge von f wird mit $W(f)$ bezeichnet. $W(f)$ ist also die Menge aller Funktionswerte von f, d.h. aller Zahlen, die herauskommen, wenn man alle Elemente der Definitionsmenge in f einsetzt.

(Statt Definitionsmenge ist oft von Definitions*bereich* die Rede, statt Wertemenge von Werte*bereich*.)

Beispiele

Auf Ihrem Taschenrechner sind zahlreiche Funktionen abrufbar: Die e-Funktion (Tastenbezeichnung meist „exp“ oder „e^x“), der „Logarithmus naturalis“ (Taste „ln“), die Cosinusfunktion (Taste „cos“), die Wurzelfunktion (Taste „$\sqrt{x}$“). Damit kannst du die Werte berechnen (lassen), die diese Funktionen an von dir gewählten Stellen annehmen. Darüber hinaus kannst du Funktionsterme beliebig zusammensetzen: z.B. $x + 1{,}2$;· $5 \cdot ln(x)$; $x^2 - x$ oder sogar $\frac{1}{sin(\sqrt{x+1})}$.