Kurvendiskussion: $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1}$

$f(x) = (x^2+2x+1) \cdot e^{-x+1}$

Definitionsmenge:

$D_{max}(f) = \mathbb{R}$

Ableitungen:

$f'(x) = (2x + 2) \cdot e^{-x+1} + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1)$ (Ketten- und Produktregel)

$= (2x + 2) \cdot e^{-x+1} + (-x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x+1}$

$= \underline{\underline{(-x^2 + 1) \cdot e^{-x+1}}}$

$f''(x) = -2x \cdot e^{-x+1} + (-x^2 + 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1)$

$= -2x \cdot e^{-x+1} + (x^2 - 1) \cdot e^{-x+1}$

$= \underline{\underline{(x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x+1}}}$

$f'''(x) = (2x - 2) \cdot e^{-x+1} + (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x+1} \cdot (-1)$

$= (2x - 2) \cdot e^{-x+1} + (-x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1}$

$= \underline{\underline{(-x^2 + 4x - 1) \cdot e^{-x+1}}}$

Symmetrie:

$f(-x) = ((-x)^2 + 2(-x) + 1) \cdot e^{-(-x)+1} = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{x+1}$

$\neq f(x)$, aber auch $\neq -f(x)$

Also keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

Achsenschnittpunkte:

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0)=1 \cdot e \approx 2{,}72$, also $\underline{\underline{S_y(0\,;\,2{,}72)}}$;

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x)=0$

$(x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x+1} = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \vee e^{-x+1} = 0$ | rechte Seite unlösbar

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ | quadratische Ergänzung nicht nötig, da $x^2 + 2x + 1$ schon ein Binom ist

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0$ | Ablesen der Nullstelle aus der faktorisierten Form

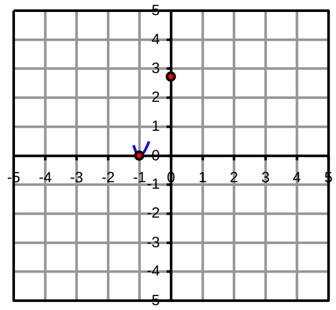
$\Leftrightarrow x = -1$ (doppelt)

$\underline{\underline{S_x(0\,|\,-1)}}$ (Berührpunkt)

Zwischenstand als **Skizze** in Koordinatensystem eintragen:

S_y (0 ; 2,72)

doppelte Nullstelle bei x = -1



Verhalten für betraglich große x (Fernverhalten):

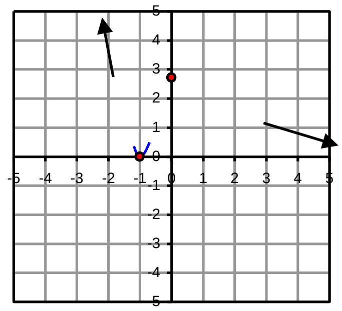
[etwas unmathematisches Austesten: f (-10) ≈ 4,85 · 10^6] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

[etwas unmathematisches Austesten: f (10) ≈ 0,015 ≈ 0] $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Mathematischer geht es mittels Argumentation
(in Bezug auf die Grenzwerte dominiert bei einem Produkt aus e-Funktion und ganzrationaler Funktion stets die e-Funktion. Die ganzrationale Funktion ist nur bezüglich des Vorzeichens zu berücksichtigen)
oder, *wenn man den kennt*, mit dem Satz von de l´Hospital.

Zwischenstand als **Skizze** in Koordinatensystem eintragen:

S_y (0 ; 2,72)
doppelte Nullstelle bei x= -1
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$



Extrema:

notwendige Bedingung: f´(x)=0

$(-x^2 + 1) \cdot e^{-x+1} = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0 \vee e^{-x+1} = 0$ | rechte Gleichung unlösbar

$\Leftrightarrow -x^2 + 1 = 0$ | ·(-1)

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0$ | +1

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ | $\pm\sqrt{}$

$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{1}} \vee x = \underline{\underline{-1}}$

hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$f''(-1) = ((-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1) \cdot e^{1+1} = (1 + 2 - 1) \cdot e^2 = 2 \cdot e^2$ (≈ 14,8) > 0,
also lok. Minimalstelle bei x = -1

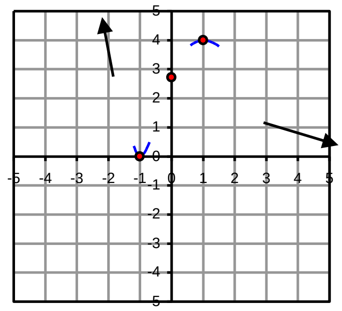
f (-1) = 0 (s.o.); <u>lok. T.P. (-1 ; 0)</u>

$f''(1) = (1^2 - 2 \cdot 1 - 1) \cdot e^{-1+1} = -2 \cdot e^0 = -2 =$ < 0, also lok. Maximalstelle bei x = 1

$f(1) = (1^2 + 2 \cdot 1 + 1) \cdot e^{-1+1} = 4 \cdot e^0 = 4$; <u>lok. H.P. (1 ; 4)</u>

Zwischenstand als **Skizze** in Koordinatensystem eintragen:

S_y (0 ; 2,72)
doppelte Nullstelle bei x = -1
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$
lok. T.P. (-1 ; 0), lok. H.P. (1 ; 4)



Wendepunkte:

notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$(x^2 - 2 \cdot x - 1) \cdot e^{-x+1} = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0 \vee e^{-x+1} = 0$ | rechte Gleichung unlösbar

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$ | + 1 + 1 (quadrat. Ergänzung)

$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x + 1 = 2$

$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 2$ | $\pm \sqrt{\ }$

$\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{2} \approx 1{,}4142 \vee x - 1 = -\sqrt{2} \approx -1{,}4142$ | + 1

$\Leftrightarrow x = \sqrt{2}+1 \approx 2{,}4142 \vee x = -\sqrt{2}+1 \approx -0{,}4142$

hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$f'''(-0{,}41) = (-(-0{,}41)^2 + 4 \cdot (-0{,}41) - 1) \cdot e^{0{,}41+1} \neq 0$, d.h. Wendestelle bei x ≈ -0,41

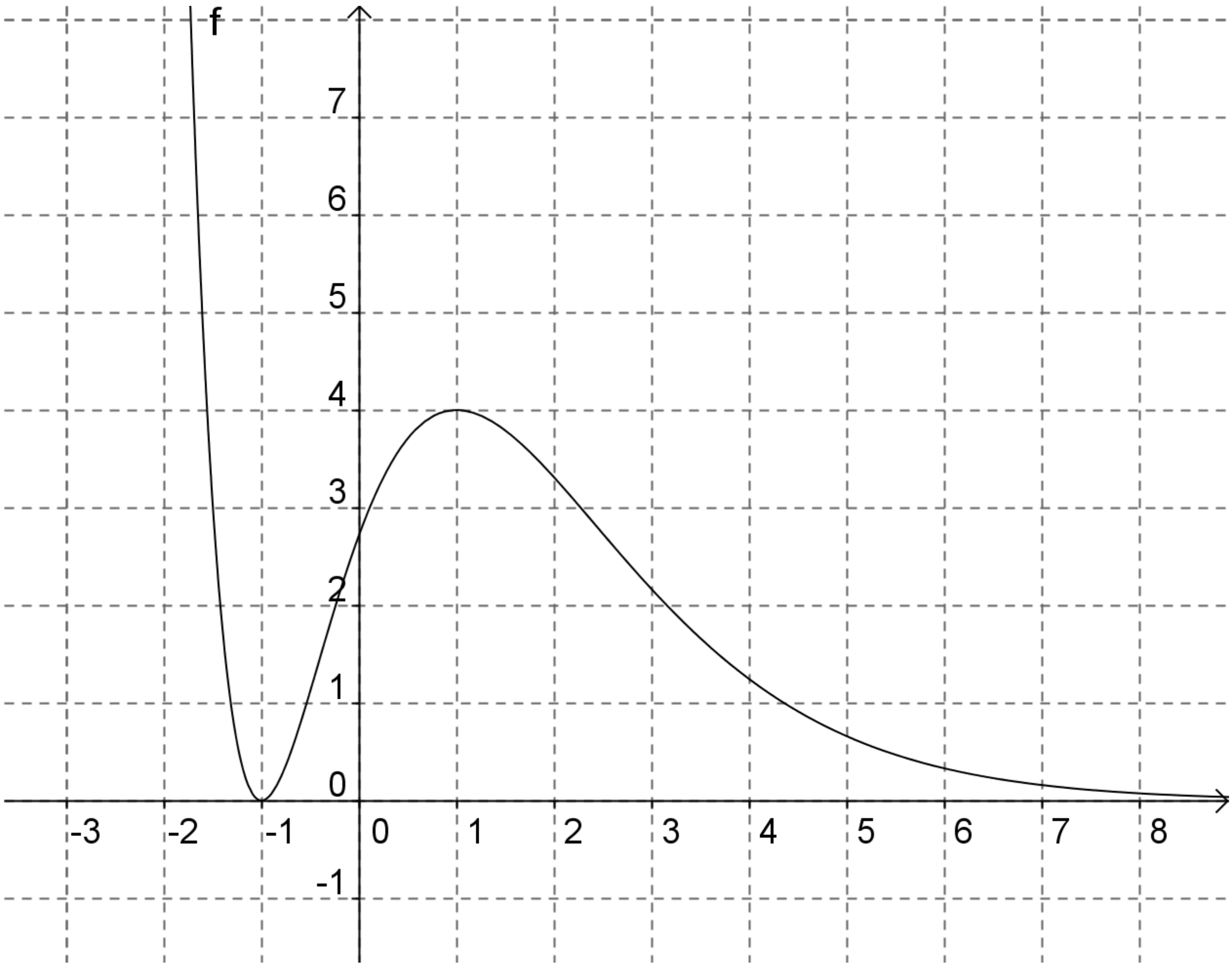
$f(-0{,}41) = 1{,}4$, also W.P.$_1$(-0,41 | 1,4)

$f'''(2{,}41) = (-(2{,}41)^2 + 4 \cdot (2{,}41) - 1) \cdot e^{-2{,}41+1} \neq 0$, d.h. Wendestelle bei x ≈ 2,41

$f(2{,}41) = 2{,}8$, also W.P.$_2$(2,41 | 2,8)

Wertetabelle:

x	-2	-1	-0,41	0	1	2	2,41	3	4	5
f (x)	$e^3 \approx$ 20,1	0	1,4	$e \approx 2{,}7$	4	9/e ≈3,3	2,8	$16/e^2$ ≈2,2	$25/e^3$ ≈1,2	$36/e^4$ ≈0,7
		T.P.	W.P	S_y	H.P.		W.P.			


f
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8